Corrigé

Introduction à l'optimisation
Devoir Surveillé II

Total : 20pts
Durée; 2h

Partie Optimisation linéaire

26 mars 2026

Question 1 (Questions de cours – 6pts) *Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies (✓) ou fausses (✗)*

a. ✓ *Soit le problème d'optimisation suivant*

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + \frac{1}{2}x_3 \\ s.t. \quad & x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 9x_4 + x_5 \leq 4 \\ & x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 9x_4 - x_5 \leq 7 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{aligned} \tag{1}$$

l'objectif est borné par 11.

b. ✓ *L'enveloppe convexe d'un ensemble de points d'un polytope P est toujours inclue dans le polytope.*

c. ✓ *Dans les tableaux de simplexe, si l'une des valeurs de la colonne des membres de droite est nulle, cela implique qu'il n'est pas possible de faire entrer une variable dans la base sans immédiatement activer une contrainte.*

d. ✓ *Soit un programme d'optimisation linéaire sous forme standard. Deux sommets retournés successivement par l'algorithme du simplexe partagent toujours $n-1$ contraintes actives.*

e. ✗ *Le problème*

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + 2|2x_2 + 5| \\ s.t. \quad & |x_1 + 4| - |4x_2| \leq 7 \end{aligned} \tag{2}$$

peut être réécrit sous la forme d'un programme d'optimisation linéaire.

f. ✗ *L'objectif du dual donne toujours une borne supérieure sur l'objectif du primal.*

Question 4 (Dualité - 5pts) *On considère le problème primal suivant :*

$$\begin{array}{lrrrl}
\max & 4x_1 & +x_2 & +3x_3 & \\
s.t. & x_1 & +x_2 & +x_3 & \leq 6 \\
 & 2x_1 & & +x_3 & \geq 4 \\
 & x_1, & +3x_2 & +2x_3 & = 10 \\
 & & x_2 & +x_3 & \leq 5 \\
 & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0
\end{array} \qquad \text{(P)}$$

On suppose que l'on dispose de la solution optimale du primal $x_1^* = 2, x_2^* = 0, x_3^* = 4$.

1. *Donner le dual (D) de* (P)
2. *Pour chaque contrainte du primal, indiquer si la contrainte est active ou inactive à la solution optimale* x^*.
3. *En utilisant les contraintes de complémentarité (sans résoudre ni le dual ni le primal) donner la solution* $y_1^*, y_2^*, y_3^*, y_4^*$ *du dual (D).*
4. *Vérifier que pour les solutions* x^* *et* y^*, *l'objectif de (P) est égal à l'objectif de (D).*

DS 2 MISC 2026 Corrigé

Question 2

$$\min \; -2x_1 + 2x_2 - 3x_3$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 - x_2 + 2x_3 + s_1 = 8$$

$$-5x_1 + 5x_2 + x_3 + s_2 = 3$$

$$3x_1 - 3x_2 + x_3 - s_3 = 5$$

$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	a_1	
1	-1	2	1	0	0	0	8
-5	5	1	0	1	0	0	3
3	-3	1	0	0	-1	1	5
-2	2	-3	0	0	0	M	0

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	a_1	
1	-1	2	1	0	0	0	8
-5	5	1	0	1	0	0	3
3	-3	1	0	0	-1	1	5
$-2-3M$	$2+3M$	$-3-M$	0	0	M	0	$-5M$

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	a_1	
0	0	$5/3$	1	0	$1/3$	$-1/3$	$19/3$
0	0	$8/3$	0	1	$-5/3$	$5/3$	$34/3$
1	-1	$1/3$	0	0	$-1/3$	$1/3$	$5/3$
0	0	$-7/3$	0	0	$-2/3$	$2/3+M$	$10/3$

$L_3' \leftarrow L_3/3$

$L_1' \leftarrow L_1 - L_3'$

$L_2' \leftarrow L_2 + 5L_3'$

$L_4' \leftarrow L_4 + (2+3M)L_3'$

DS2 MISC 2026 Corrigé

Question 2

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	a_1	
0	0	1	$3/5$	0	$1/5$	$-1/5$	$19/5$ → sortante
0	0	0	$-8/15$	1	$-M/5$	$M/5$	$18/15$
1	-1	0	$-1/5$	0	$-\frac{6}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{6}{15}$
0	0	0	$7/5$	0	$-\frac{3}{15}$	$\frac{3}{15}+M$	$\frac{50}{15}+\frac{133}{15}$

$-1/5$

↑ entrante

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	a_1	
0	0	5	3	0	1	-1	19
0	0	M	$\frac{25}{5}$	1	0	0	$\frac{209}{5}+\frac{18}{15}=\frac{645}{15}=43$
1	-1	2	1	0	0	0	$\frac{38}{5}+\frac{6}{15}=\frac{120}{15}=8$
0	0	1	2	0	0	M	$\frac{50}{15}+\frac{133}{15}+\frac{19}{5}$

Question 3

1. Il suffisait de prendre $b_2 = 0$
2. Le tableau est incorrect car la variable x_2 (de base) prend une valeur négative
3. Il suffit de prendre $* < 0$

DS2 MISC 2026 Corrigé (Suite) Question 4

1)

Le dual est donné par

1/2

$$\min \; 6y_1 + 4y_2 + 10y_3 + 5y_4$$

$$\text{s.t} \quad y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 4$$

$$y_1 + 3y_3 + y_4 \geq 1$$

$$y_1 + y_2 + 2y_3 + y_4 \geq 3$$

$$y_1 \geq 0 \quad y_4 \geq 0 \quad y_2 \leq 0 \quad y_3 \in \mathbb{R}$$

1/2

2)

Soit $x_1^* = 2$ $x_2^* = 0$ $x_3^* = 4$

On a $x_1^* + x_2^* + x_3^* = 6$ → la contrainte 1 est active

$2x_1^* + x_3^* = 8$ → ——— 2 est inactive

$x_1^* + 3x_2^* + 2x_3^* = 10$ → ——— 3 est active

$x_2^* + x_3^* = 4$ → ——— 4 est inactive

$x_2^* \geq 0$ est également active.

1/2

(c) Les contraintes de complémentarité donnent

$$x_1^*(y_1^* + 2y_2^* + y_3^* - 4) = 0$$

$$x_3^*(y_1^* + y_2^* + 2y_3^* + y_4^* - 3) = 0$$

d'autre part on sait que puisque les contraintes 2 et 4 sont inactives, on doit avoir $y_2^* = y_4^* = 0$

i.e

$$(2x_1^* + x_3^* - 8)\,y_2^* = 0 \Rightarrow y_2^* = 0$$

$$(x_2^* + x_3^* - 4)\,y_4^* = 0 \Rightarrow y_4^* = 0$$

DS2 MISC 2026 Corrigé (suite)

(Question 4) Suite

en combinant les contraintes de complémentarité, on trouve donc

$y_2^* = y_4^* = 0$

$$\left.\begin{array}{l} y_1^* + y_3^* = 4 \\ y_1^* + 2y_3^* = 3 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} y_3^* = -1 \\ y_1^* = 5 \end{array}$$

$\frac{}{1}$