Corrigé

Introduction à l'optimisation
Devoir Surveillé

Total : 20pts

Durée; 2h

Augustin Cosse
augustin.cosse@univ-littoral.fr

26 mars 2026

Question 1 (Questions de cours – 6pts) *Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies (✓) ou fausses (✗)*

a. ✓ *L'ensemble $C = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \;:\; x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ est convexe.*

b. ✓ *La contrainte $|x_1 + x_2| \leq 3$ est linéaire*

c. ✗ *Si un programme d'optimisation linéaire est défini sur un polytope borné, alors il admet une solution unique.*

d. ✓ *Si un polytope contient une droite, il n'existe pas de fonction objectif pour laquelle le problème associé admet une solution unique.*

e. ✗ *La région $\{(x, y) \;:\; x \geq 0, y \geq 0\}$ a un nombre infini de points extrêmes.*

f. ✗ *La contrainte $|x_1| + |x_2| \leq 4$ est linéaire.*

g. ✓ *Tout sommet de l'ensemble $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \;:\; \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$ est un point extrême.*

h. ✗ *L'enveloppe convexe d'un ensemble de points $S \subseteq \mathbb{R}^n$ est donnée par*

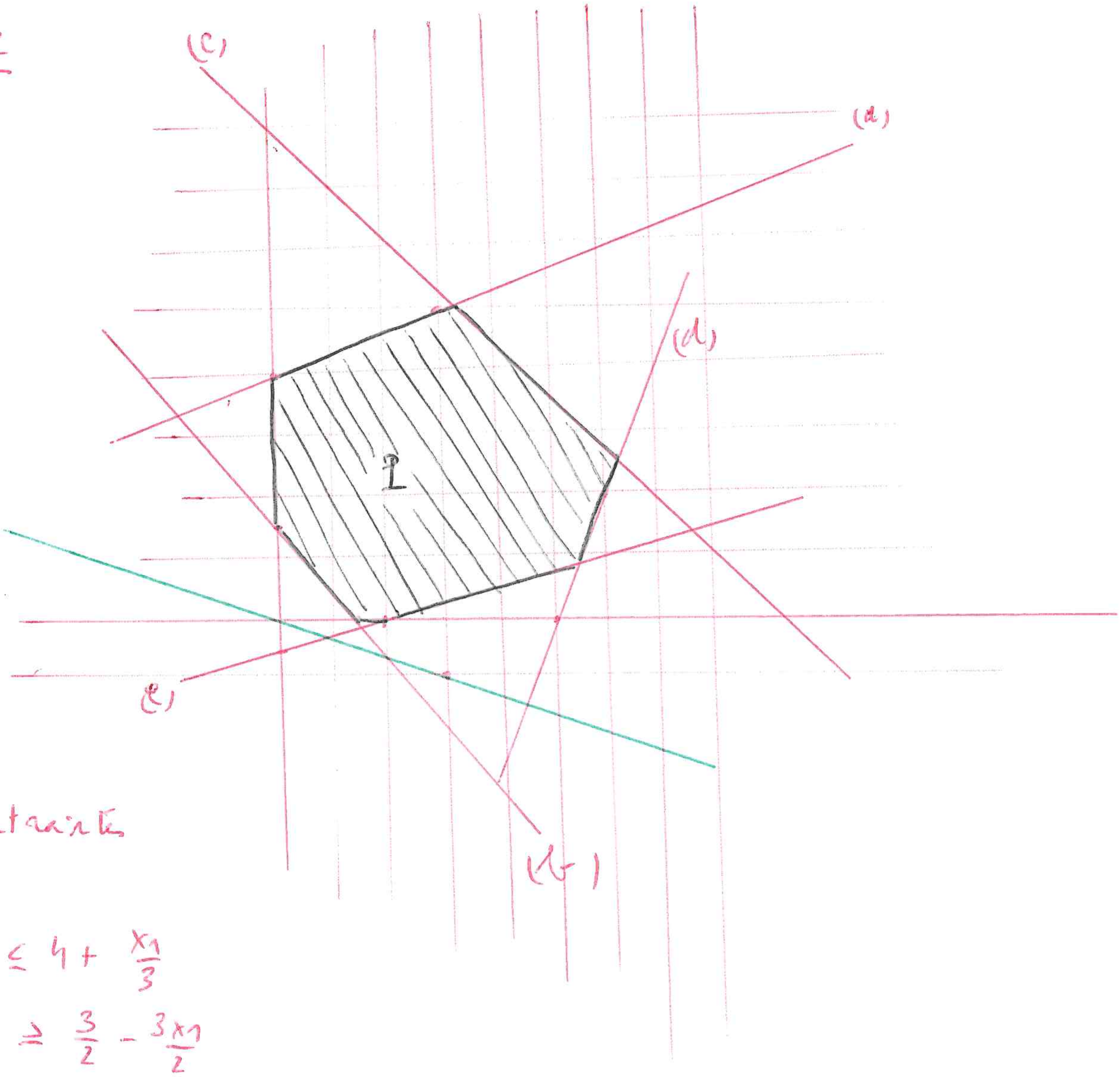
$$\mathrm{conv}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \boldsymbol{x}_i \;:\; \boldsymbol{x}_i \in S,\; \lambda_i \geq 0,\; \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \leq 1,\; k \in \mathbb{N} \right\} \qquad (1)$$

Question 2 (Résolution graphique – 5pts) *Résoudre le problème suivant en utilisant la méthode graphique*

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_2 + x_1 \\ s.t. \quad & 3x_2 - x_1 \leq 12 \\ & 2x_2 + 3x_1 \geq 3 \\ & x_2 + x_1 \leq 8 \\ & 2x_1 - x_2 \leq 10 \\ & x_1 - 4x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

MISC DS 1 2026 Corrigé

Question 2



On a les contraintes suivantes :

(a) $x_2 \leq 4 + \frac{x_1}{3}$

(b) $x_2 \geq \frac{3}{2} - \frac{3x_1}{2}$

(c) $x_2 \leq 8 - x_1$

(d) $x_2 \geq 2x_1 - 10$

(e) $x_2 \geq \frac{x_1}{4} - \frac{1}{2}$

$x_1, x_2 \geq 0$

L'objectif peut s'écrire

$x_2 = -\frac{x_1}{3} + C$

La solution est donc donnée par l'intersection de (a) et (c)

On a $4 + \frac{x_1}{3} = 8 - x_1 \Rightarrow x_1 = 3 \quad x_2 = 5.$

MISC DS1 2026 Corrigé (suite)

Question 3

Soit x_A = nbre de camions de type A

x_B = nbre de camions de type B

le problème peut s'écrire

$$\max \; 400 x_A + 600 x_B$$

$$\text{s.t} \quad \begin{aligned} 40 x_A + 60 x_B &\le 1800 \\ 4 x_A + 6 x_B &\le 47 \\ 10 x_A + 12 x_B &\le 96 \\ x_A + x_B &\le 10 \\ x_A &\ge 3 \\ x_B &\ge 0 \end{aligned}$$

Question 4

On commence par montrer que tous les points extrêmes de $P+Q$ sont donnés par la somme d'un point extrême de P et d'un point extrême de Q.

En effet supposons que z soit un point extrême et supposons qu'il existe x_1, x_2 $x_1 \neq x_2 \in P$ et $y \in Q$ t.q

$$z = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 + y$$

On a alors $z = \lambda(x_1+y) + (1-\lambda)(x_2+y)$

ce qui donne une contradiction

MISC DS1 2026 Corrigé (Suite)

Une fois qu'on a montré que tout point extrême de $P+Q$ est donné par
la somme d'un point extrême de P et d'un point extrême de Q

il suffit de montrer la convexité de $P+Q$

On conclut ensuite en utilisant le fait qu'en dimension finie,
un ensemble convexe caractérisé par un nombre fini de points
extrêmes est un polytope.