Analyse Numérique
Intégration

Augustin Cosse
augustin.cosse@univ-littoral.fr

December 2, 2025

Question 1 *On considère la formule de quadrature de Newton-Cotes. Pour des points de quadrature équi-espacés, $x_k = a + kh$, pour $k = 0, 1, \ldots, n$ et $n \geq 1$, montrer que les poids d'intégration satisfont $w_k = w_{n-k}$ pour $k = 0, 1, \ldots, n$.*

Question 2 *On considère une formule de quadrature sur l'intervalle $[-1, 1]$ basée sur les points de quadrature $x_0 = -\alpha$ et $x_1 = \alpha$ où $0 < \alpha \leq 1$:*

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \approx w_0 f(-\alpha) + w_1 f(\alpha)$$

On souhaite obtenir une approximation exacte lorsque la fonction f est un polynôme de degré 1. Montrer que $w_0 = w_1 = 1$, indépendamment de la valeur de α. Montrer ensuite qu'il existe une valeur particulière de alpha pour laquelle la formule est exacte y compris pour des polynômes de degré 2. Trouver cette valeur de α, et montrer que, pour cette valeur, la formule est exacte pour des polynômes de degré 3.

Question 3 *La formule de Newton-Cotes pour $n = 3$ sur l'intervalle $[-1, 1]$ est donnée par*

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \approx w_0 f(-1) + w_1 f(-1/3) + w_2 f(1/3) + w_3 f(1)$$

En utilisant le fait que cette formule doit être exacte pour les polynômes de degré 3 (ou à l'aide d'une quelconque autre méthode) Montrer que

$$\begin{aligned} 2w_0 + 2w_1 &= 2, \\ 2w_0 + \frac{2}{9} w_2 &= \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

et en déduire la valeur des poids w_0, w_1, w_2 et w_3.

Question 4 *Pour chacune des fonctions $1, x, x^2, \ldots, x^6$, déterminer la différence entre $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$ et (i) l'estimation de l'intégrale via la méthode de Simpson, (ii) La formule de Newton-Cotes fournie dans la question préćdente. En déduire que pour chaque* *polynôme de degré 5, la formule de Newton-Cotes est plus précise que la formule d'intégration de Simpson. Finalement, trouver un polynôme de degré 6 pour lesquel la formule d'intégration de Simpson est plus précise que la formule d'intégration de Newton-Cotes.*

Question 5 *Dériver la formule de Newton-Cotes pour* $\int_0^1 f(x)\,dx$ *basée sur les points* $0, 1/3, 2/3$ *and* 1.

Question 6 *Obtenir une formule de Newton-Cotes pour l'intégrale* $\int_0^1 f(x)\,dx$ *qui soit exact pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à* 4

Question 7 *Trouver les coefficients* w_0, w_1 *tels que l'intégrale*

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx w_0 f(0) + w_1 f(1)$$

est exacte pour les fonctions de la forme $f(x) = ae^x + \cos(\pi x/2)$

Question 8 *Trouver les coefficients* w_0, w_1 *tels que l'intégrale*

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx \approx w_0 f(0) + w_1 f(\pi)$$

est exacte pour toutes les fonctions de la forme $f(x) = a + b\cos x$

Question 9 *Pour quelle classe de polynômes la règle de qudrature suivante*

$$\int_0^2 x f(x) \approx w_0 f(0) + w_1 f(1) + a_2 f(2)$$

est-elle exacte?

Question 10 *Déterminer le nombre de sous-intervalles nécessaires afin d'approximer l'intégrale*

$$\int_1^2 f(x)\,dx$$

avec une précision de l'ordre de 10^{-6} *en utilisant la règle du trapèze (composite/sur chaque sous intervalle) pour*

1. $f(x) = x$
2. $f(x) = e^{-x}$
3. $f(x) = e^{-x^2}$

Question 11 *Trouver la formule de quadrature de Gauss-Legendre pour l'intégrale*

$$\int_{-1}^{1} xf(x)\, dx = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1)$$

qui soit exacte pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à 3*.*

Question 12 *On considère une règle de quadrature pour l'approximation de l'intégrale* $\int_0^1 f(x)\, dx$ *donnée par*

$$\int_0^1 f(x)\, dx \approx w_1 f(0) + w_2 f(x_1)$$

Trouver le degré maximum de précision pouvant être atteint par un choix approprié des valeurs de w_1, w_2 *et* x_1*. Pour un tel choix de* w_1 *and* w_2*, approximer l'intégrale* $\int_0^1 x^3\, dx$ *et comparer avec la valeur exacte.*

Question 13 *Déterminer les constantes* a, b, c *et* d *correspondant à une formule de quarature*

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = af(-1) + bf(1) + cf'(-1) + df'(1)$$

dont le degré de précision soit 3*.*

Question 14 *Prouver que la somme des poids dans la formule de Newton Cotes est* $b - 1$ *quelle que soit la valeur de* n

Question 15 *Soit* f *une fonction arbitraire (continue) sur* $[0, 1]$ *satisfaisant* $f(x) + f(1 - x) = 1$ *pour* $0 \leq x \leq 1$

1. *Montrer que* $\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{1}{2}$
2. *Montrer que la règle du trapèze composite (i.e. sur plusieurs sous-intervalles) pour calculer l'intégrale* $\int_0^1 f(x)\, dx$ *est exacte.*
3. *Montrer, le plus simplement possible, que la formule composite de Simpson et de façon plus générale, toute formule de quadrature symmétrique sont elles aussi exactes.*

Question 16 *On considère l'intégrale d'une fonction linéaire,*

$$I = \int_0^1 (\alpha + \beta x)\, dx$$

Où les coefficients α *et* β *sont des constantes non nulles. On souhaite approximer cette intégrale en décomposant l'intervalle* $[0, 1]$ *en* $N - 1$ *segments de même longueur* h *et en appliquant ensuite une règle d'intégration. Parmi les règles suivantes, indiquer laquelle pemettra de calculer l'intégrale exactement (quelque soit la valeur de* h*):*

1. *La méthode d'approximation des rectangles (à gauche)*
2. *La méthode d'approximation des rectangles (à droite)*
3. *La méthode des trapèzes*
4. *La méthode des rectangles centrée*

(Indice: réaliser un dessin peut être utile)

Question 17 *Dériver les approximations de l'intégrale*

$$\int_0^{30} \frac{1}{x^3+1}\,dx$$

pour $n = 6$ à l'aide des méthodes suivantes:

1. *Méthode du point médian*
2. *Méthode du trapèze*
3. *Méthode de Simpson*

Il n'est pas nécessaire de simplifier les solutions

Question 18 *Déterminer l'approximation, par la règle du point médian, de l'intégrale suivante*

$$\int_0^{\pi} \sin x\,dx$$

pour $n = 3$.

Question 19 *On considère un solide V de hauteur $h = 40cm$ et caractérisé par une section transverse donnée par des disques de rayons variables. Les rayons de ces disques (pour différentes hauteurs) sont repris au tableau 1 ci-dessous. Utiliser la règle du trapèze*

hauteur	0	10	20	30	40
diamètre	24	16	10	6	4

Table 1: Données utilisées pour la question 18

Question 20 *Approximer les intégrales suivantes à l'aide des méthodes du trapèze, de Simpson et du point médian.*

1. $\displaystyle\int_{0.5}^{1} x^4\,dx$

2. $\int_1^{1.5} x^2 \ln x \, dx$

3. $\int_1^{1.6} \frac{2x}{x^2-4} \, dx$

4. $\int_0^1 x \sin x \, dx$

5. $\int_0^{0.5} \frac{2}{x-4} \, dx$

6. $\int_0^1 x^2 e^{-x} \, dx$

7. $\int_0^{0.35} \frac{2}{x^2-4} \, dx$

8. $\int_0^{\pi/4} e^{3x} \sin 2x \, dx$

Question 21 *Trouver le degré de précision de la formule de quadrature suivante*

$$\int_{-1}^{1} f(x) \, dx \approx f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Question 22 *La formule de quadrature*

$$\int_{-1}^{1} f(x) \, dx = c_0 f(-1) + c_1 f(0) + c_2 f(1)$$

est exacte pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à deux. Déterminer la valeur des poids c_0, c_1 *et* c_2*.*

Question 23 *Déterminer la valeur des constantes* c_0, c_1 *et* x_1 *telles que la formule de quadrature*

$$\int_0^1 f(x) \, dx = c_0 f(0) + c_1 f(x_1)$$

a le degré de précision le plus élevé possible.

Question 24 *Déterminer la valeur des constantes* x_0, x_1 *et* c_1 *telles que la formule de quadrature*

$$\int_0^1 f(x) \, dx \approx \frac{1}{2} f(x_0) + c_1 f(x_1)$$

a le degré de précision le plus élevé possible.

Question 25 *Déterminer le degré de précision de l'approximation suivante*

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \frac{1}{4}\left[3f(-2/3) + 2f(0) + 3f(2/3)\right]$$

Question 26 *Utiliser la règle d'intégration de Romberg et déterminer la valeur de R_{44} pour l'intégrale*

$$\int_{0}^{2} \sqrt{x}\,dx$$

Question 27 *Quel est le pas maximal pour lequel la règle du trapèze est exacte dans le cas de polynômes trigonométriques de la forme*

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}, \quad t \in [0, 2\pi)$$

Question 28 *Montrer que la formule*

$$\int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)^{-1/2}\,dx = \frac{\pi}{N}\sum_{n=1}^{N} f\left(\cos\left(\frac{2n-1}{2N}\pi\right)\right)$$

est exacte pour tous les polynômes de degré $2N-1$.

Question 29

1. *Donner les règles du point médian et du trapèze pour l'approximation de l'intégrale$\int_0^h f(x)\,dx$*
2. *Dériver les formules d'erreur pour les deux méthodes*
3. *Soit $f(x) = x^3$. Montrer qu'il est possible de combiner les résultats des deux méthodes de façon à ce que l'erreur d'intégration soit nulle.*
4. *Montrer que l'on peut également obtenir la valeur exacte de l'intégrale en utilisant la méthode d'extrapolation de Richardson en utilisant les approximations par la méthode du trapèze avec un intervalle et avec deux intervalles de taille egale à $h/2$.*