Corrigé

Introduction à l'optimisation
Devoir Surveillé #2, partie optimisation linéaire

Total : 26pts
Durée; 2h

Augustin Cosse
augustin.cosse@univ-littoral.fr

Mars 2025

Question 1 (Questions de cours – 6pts) *Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies (✓) ou fausses (✗)*

- a. ✓ *Le problème* $\max \sum_{j=1}^{n} c_j|x_j|$ *tel que* $\sum_{j=1}^{n} a_j|x_j| \leq b$ *avec* $c_j, a_j \geq 0$ *peut être réécrit sous la forme d'un programme d'optimisation linéaire.*
- b. ✗ *Si un problème d'optimisation linéaire admet une solution optimale, les composantes du vecteur des coûts réduits sont nécessairement strictement positives pour toutes les variables hors base.*
- c. ✗ *Soit* $\boldsymbol{x}$ *et* $\boldsymbol{y}$ *des solutions respectivement primal et dual optimales. De par les conditions de complémentarité, les produits* x_iy_i *sont toujours nuls, i.e.* $x_iy_i = 0$ *pour tout* i.
- d. ✓ *Si le primal admet une solution optimale alors le dual admet nécessairement au moins une solution optimale.*
- ok si maximisation → (X) e. ✓ *Si* $\boldsymbol{x}$ *est une solution de base admissible alors le vecteur des coûts réduits correspondant est tel que toutes ses composantes sont positives ou nulles.*
- f. ✗ *L'union de deux ensembles convexes est convexe*
- g. ✗ *Pour rappel une contrainte* $\boldsymbol{a}_i^\intercal \boldsymbol{x} \leq b_i$ *est activée par la solution optimale* $\boldsymbol{x}^*$ *d'un programme linéaire si* $\boldsymbol{a}_i^\intercal \boldsymbol{x}^* = b_i$. *Si le prix fantôme de la contrainte* $\boldsymbol{a}_i^\intercal \boldsymbol{x} \leq b_i$ *est nul, alors cette contrainte est nécessairement activée par la solution optimale* $\boldsymbol{x}^*$
- h. ✓ *Étant donné deux ensembles convexes* $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^n$, *l'ensemble* $S_3 = \{x_1 - x_2 \mid x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\}$ *est un ensemble convexe.*

Corrigé DS MISC #2

Question 2

On commence par utiliser la première contrainte pour éliminer la variable x_1 $(x_1 = 4 - 4x_2 + 2x_3)$

On obtient le problème

$$\min \; 2(4 - 4x_2 + 2x_3) - 3x_2 + x_3$$

$$\text{s.t} \quad -(4 - 4x_2 + 2x_3) + 5x_2 - x_3 \le 6$$

$$4 - 4x_2 + 2x_3 \ge 0$$

$$x_2, x_3 \ge 0$$

(la dernière contrainte provient de la contrainte $x_1 \ge 0$)

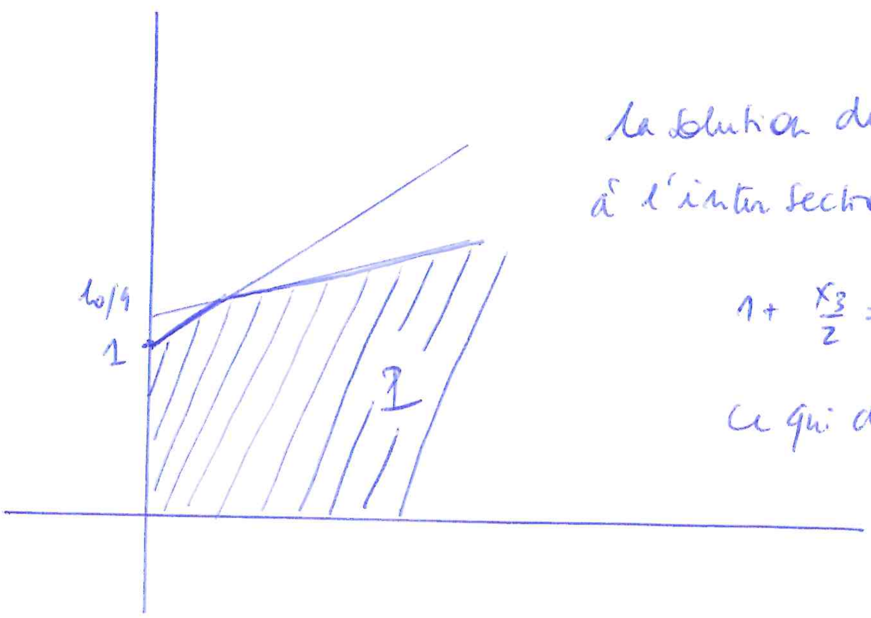
On obtient donc le problème sur 2 variables

$$\min \; -11x_2 + 5x_3$$

$$9x_2 - 3x_3 \le 10 \quad \rightarrow \quad x_2 \le \frac{10}{9} + \frac{x_3}{3}$$

$$4x_2 - 2x_3 \le 4 \quad \rightarrow \quad x_2 \le 1 + \frac{x_3}{2}$$

$$x_2, x_3 \ge 0$$



La solution du problème se trouve à l'intersection des contraintes

$$1 + \frac{x_3}{2} = \frac{10}{9} + \frac{x_3}{3}$$

ce qui donne

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 4/3$$

et $x_3 = 2/3$

Corrigé DS MISC #2

Question 2) suite

Si on change la première contrainte, on obtient

$$\min \quad 2(\Delta - 4x_2 + 2x_3) - 3x_2 + x_3$$

$$\text{s.t} \quad -(\Delta - 4x_2 + 2x_3) + 5x_2 - x_3 \leq 6$$

$$\Delta - 4x_2 + 2x_3 \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad \min \quad -11x_2 + 5x_3$$

$$9x_2 - 3x_3 \leq 6 + \Delta \quad \rightarrow \quad x_2 \leq \frac{6+\Delta}{9} + \frac{x_3}{3}$$

$$4x_2 - 2x_3 \leq \Delta \qquad x_2 \leq \frac{\Delta}{4} + \frac{x_3}{2}$$

la pente des contraintes et la pente de la fonction objectif ne change pas. Si $\frac{6+\Delta}{9} > \frac{\Delta}{4}$ la solution est donnée par l'intersection des 2 contraintes

Sinon la solution est donnée par

$$x_3 = 0 \quad x_2 = \frac{6+\Delta}{9} \qquad x_1 = 4 - \frac{4(6+\Delta)}{9} \qquad \text{si} \quad \frac{6+\Delta}{9} > 0$$

$$= \frac{12}{9} - \frac{4\Delta}{9}$$

etc

Corrigé DS MISC #2

Question 3

(a) $x_1 = 8 \quad x_5 = 12 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = x_4 = 0$

(b) on a

$$(D) \quad \begin{array}{ll} \min & 8y_1 + 4y_2 \\ \text{s.t} & y_1 - y_2 \geq 2 \\ & 2y_1 + y_2 \geq 1 \\ & y_1 - 2y_2 \geq -1 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{array}$$

On a $x^* = (8, 0, 0, 0, 12)$ on veut la solution du dual y^*

d'autre part, les conditions de complémentarité donnent

$$y_1 (a_1^T x - b_1) = 0$$
$$y_2 (a_2^T x - b_2) = 0$$

$$(c_1 - y^T A_1) x_1 = 0 \qquad\qquad 8[2 - (y_1 - y_2)] = 0 \rightarrow y_1 = 2 + y_2$$
$$(c_2 - y^T A_2) x_2 = 0 \quad \longrightarrow \quad [1 - (2y_1 + y_2)]$$
$$(c_3 - y^T A_3) x_3 = 0 \qquad\qquad [-1 - (y_1 - 2y_2)]$$

$$a_2^T x - b_2 = 4 - (-x_1^* + x_2^* - 2x_3^*)$$
$$= 4 - (-8) = 10 \Rightarrow y_2 = 0 \Rightarrow y_1 = 2$$

c) $\rightarrow y_1 = 2 \rightarrow$ le prix caché associé à chaque contrainte est donné par la valeur de la variable duale associée à cette contrainte

Corrigé DS MISC #2

Question 3 (suite)

Étant donné qu'on a $y_2 = 0$ et $y_1 = 2$

augmenter le membre de droite de la seconde contrainte n'a aucun effet sur la valeur de l'objectif tandis que le prix caché associé à la première contrainte est positif. Il est donc plus intéressant d'augmenter le membre de droite de la première contrainte

Question 4 1)

Le dual est donné par
$$\begin{aligned} \min \quad & b^T y \\ \text{s.t} \quad & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

2) il suffit de prendre par exemple

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3) pour le primal on a

$$\begin{aligned} \max \quad & -c_1 x_1 + c_2 x_2 = \gamma \\ \text{s.t} \quad & x_1 - x_2 = 0 \\ & x_1 \leq 1 \end{aligned}$$

En conséquence si $c_1 = c_2$ la solution est donnée par $x_1 = x_2 \in [0, 1]$

$c_1 < c_2$ $\quad 1$

$c_2 < c_1$ $\quad 0$

Corrigé DS MISC #2

Question 4 (suite)

Pour le dual on a

$$(P)\quad \begin{array}{l} \max \ (C_2 - C_1)x \\ \text{s.t} \quad 0 \leq x \leq 1 \end{array} \quad \xrightarrow{P - D} \quad (D) \quad \begin{array}{l} \min \ y \\ \text{s.t} \quad y \geq C_2 - C_1 \\ \qquad y \geq 0 \end{array}$$

En conséquence si $C_2 > C_1 \Rightarrow y = C_2 - C_1$

$C_2 \leq C_1 \Rightarrow y = 0$

Ça fonctionne aussi si on écrit le dual à partir du problème défini sur les 4 contraintes de départ. Le dual est alors donné par

$$\begin{array}{ll} \min & y_3 + y_4 \\ \text{s.t} & -y_1 + y_2 + y_4 \geq -C_1 \\ & y_1 - y_2 + y_3 \geq C_2 \\ & y_i \geq 0 \end{array}$$

en introduisant la variable $x = y_1 - y_2$ on peut réécrire le problème comme

$$\begin{array}{ll} \min & y_3 + y_4 \\ \text{s.t} & -x + y_4 \geq -C_1 \\ & x + y_3 \geq C_2 \\ & y_3, y_4 \geq 0 \end{array}$$

ce qui donne si $C_2 > C_2 \Rightarrow y_3 + y_4 = C_2 - C_1$

si $C_2 \leq C_1 \quad y_3 + y_4 = 0$

on a $C_1 = x = C_2$

Corrigé DS MISC #2

Question 5

en utilisant les conditions de dualité

$$\max b^T y \leq \min c^T x$$

mais $b = c$ donc

$$c^T x^* \leq \min c^T x$$

ce qui montre que x^* est optimal pour (1)