Corrigé

Introduction à l'optimisation
Devoir Surveillé

Total : 20pts
Durée; 2h

Augustin Cosse
augustin.cosse@univ-littoral.fr

Mars 2025

Question 1 (Questions de cours – 6pts) *Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies (✓) ou fausses (✗)*

a. ✓ *Dans un polytope, tout sommet est aussi un point extrême*

b. ✗ *Si une variable artificielle se trouve dans la base à la fin des itérations de simplexe, c'est que le problème de départ ne contient pas de solution admissible*

hors contraintes de positivité

c. (✗)// ✓ *Dans la méthode du simplexe, le nombre de variables de base est toujours égal au nombre de contraintes apparaissant dans la formulation standard.*

d. ✓ *L'ensemble $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq a^2\}$ est un ensemble convexe.*

e. ✓ *Un programme d'optimisation linéaire ne peut jamais avoir exactement deux solutions.*

f. ✗ *Si le domaine admissible d'un programme d'optimisation linéaire est non borné, alors la valeur de l'objectif est nécessairement non bornée*

g. ✓ *Tout polytope est un ensemble convexe*

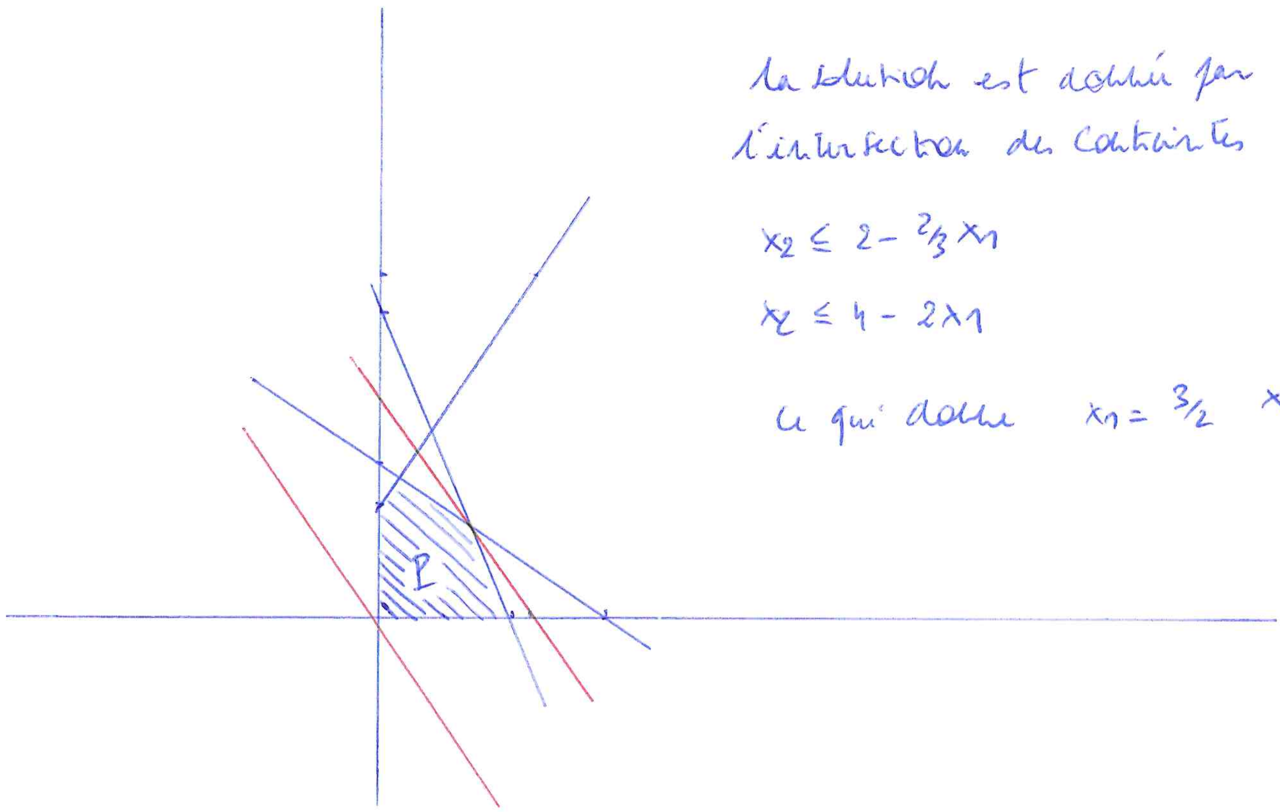
h. ✓ *Soit $\boldsymbol{x}^*$ un point du polytope $P = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}\}$ et soit $S = \{\boldsymbol{a}_i \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a}_i^\intercal \boldsymbol{x}^* = b_i\}$ l'ensemble des contraintes actives au point $\boldsymbol{x}^*$. Si $\boldsymbol{x}^*$ n'est pas une solution de base admissible, alors il existe une direction $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n$ telle que $\boldsymbol{d}^\intercal \boldsymbol{a}_i = 0$ pour tout $\boldsymbol{a}_i \in S$.*

Question 2 (Résolution graphique – 5pts) *On souhaite résoudre le problème*

Devoir Surveillé MISC # 1 \1

Corrigé

Question 2



La solution est donnée par l'intersection des contraintes

$x_2 \leq 2 - \frac{2}{3} x_1$

$x_2 \leq 4 - 2x_1$

ce qui donne $x_1 = \frac{3}{2}$ $x_2 = 1$

Question 3

Soit y_1 le nombre de décalitres de parfum 1
y_2 le nombre de décalitres de parfum 2.

Le problème peut s'écrire

$$\max \quad 135 y_1 + 110 y_2$$

$$\text{s.t} \quad 1{,}5 y_1 + 1{,}2 y_2 \leq 28$$

$$y_1 + y_2 \leq 20$$

$$0{,}3 y_1 + 0{,}7 y_2 \leq 10$$

DS MISC # 1

Corrigé

Question 4

a. a

x_1	x_2	s_1	s_2	a_1	
2	5	1	0	0	6
1	1	0	-1	1	2
$-1-M$	$-1-M$	0	M	0	0

x_1	x_2	s_1	s_2	a_1	
0	3	1	2	-2	2
1	1	0	-1	1	2
0	0	0	-1	$M+1$	$2M+2$

x_1	x_2	s_1	s_2	a_1	
0	$3/2$	$1/2$	1	-1	1
1	$5/2$	$1/2$	0	0	3
0	$3/2$	$1/2$	6	M	$2M+3$

la solution est donc donnée par $x_1 = 3$ $x_2 = 0$