Devoir surveillé #2

Solutions

Question 1

On considère le problème

$$\begin{array}{lll} \max & 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + 1 & \\ \text{s.t} & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 & \leq 5 \\ & 3x_1 \qquad + 4x_3 - x_4 & \leq 10 \\ & \quad - x_2 + x_3 - x_4 & = 1 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq 0 \end{array}$$

On commence par utiliser la contrainte d'égalité afin de se débarasser d'une des variables. Par exemple $x_4 = x_3 - x_2 - 1$

En substituant l'expression de x_4 dans les autres contraintes, on obtient le problème

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_3 - x_2 - 1 + 1 \\ & x_1 + 2x_3 + x_3 - x_2 - 1 + x_2 \leq 5 \\ & 3x_1 + 4x_3 - (x_3 - x_2 - 1) \leq 10 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Simplifiant, on obtient

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + x_2 - x_3 \\ \text{s.t} \quad & x_1 + 3x_3 \leq 6 \\ & 3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 9 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Sous forme Standard, le problème peut donc se réécrire

$$\begin{aligned} \min \quad & -2x_1 - x_2 + x_3 \\ \text{s.t} \quad & x_1 + 3x_3 \leq 6 \\ & 3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 9 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Afin de résoudre le problème on applique les itérations de SIMPLEXE en commençant avec le tableau

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 9 \\ \hline -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & \end{array} \quad \rightarrow \text{sortant}$$

$\downarrow$ entrante

pour la première itération, on met à jour le tableau comme suit

$$L_2' \leftarrow L_2/3$$
$$L_1' \leftarrow L_1 - L_2'$$
$$L_3' \leftarrow L_3' + 2L_2'$$

On continue ainsi de suite jusqu'à ne plus avoir aucun coût réduit negatif. On a

0	$-1/3$	2	1	$-1/3$	3	
1	$1/3$	1	0	$1/3$	3	→ sortante
0	$-1/3$	3	0	$2/3$	6	
	↑ entrante					

Pour le tableau suivant, auquel on applique la mise à jour

$$L_1' \leftarrow L_1 + L_2$$

$$L_3' \leftarrow L_3 + L_2$$

$$L_2' \leftarrow L_2 \cdot 3$$

Ce qui donne finalement le tableau

1	0	3	1	0	3
3	1	3	0	1	9
1	0	4	0	1	9

dont tous les coûts réduits sont non-negatifs

La solution finale est donc donnée par $x_2 = 9$ $x_1 = 0$ $x_3 = 0$

Question 2

24

Une solution optimale pour un problème qui admet une une unique solution — $c<0$ et $d\geq 0$

Une solution optimale pour un problème qui admet plusieurs solutions optimales — $c=0$ et $a_2>0$ ou $0<\frac{d}{a_3}<+\infty$

Un problème non borné — $c>0$ et $a_2\leq 0$, $\frac{d}{a_3}=\infty$ ou $<\infty$

Une solution de base qui n'est pas solution de base admissible — $d<0$

Question 3

On commence par réécrire le problème sous forme standard et en utilisant la méthode "grand M"

$$\begin{aligned}
\min \quad & -3x_1 - x_2 + Ma_2 \\
\text{s.t} \quad & 2x_1 + x_2 + s_1 = 4 \\
& 3x_1 + 2x_2 - e_2 + a_2 = 6 \\
& 4x_1 + 2x_2 + a_3 = 7
\end{aligned}$$

Question 3 (suite)

A l'optimum, on doit avoir $e_2 = a_2 = a_3 = 0$

ce qui implique (en substituant dans les contraintes)

$$2x_1 + x_2 + s_1 = 4 \qquad (*)$$

$$3x_1 + 2x_2 = 6$$

$$4x_1 + 2x_2 = 7$$

En combinant les contraintes, on a donc

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{6-2x_2}{3} = 2 - \frac{2}{3}x_2 \\ x_1 &= \frac{7-2x_2}{4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow 7 - 2x_2 = 8 - \frac{8}{3}x_2$$

$$\Rightarrow x_2 = 6/4$$

$$x_1 = \frac{7}{4} - \frac{12}{16} = 1$$

et finalement, en utilisant $(*)$

$$s_1 = 4 - x_2 - 2x_1$$

$$= 2 - x_2 = 8/4 - 6/4 = 1/2$$

le tableau final doit donc se réécrire

x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	
0	0	1	0	0	$-1/2$	$1/2$
0	1	0	-2	2	$-3/2$	$6/4$
1	0	0	1	-1	1	1
0	0	0	?	?	?	?

Question 3 (Suite)

Pour le vecteur des coûts réduits, on substitue simplement dans la fonction objectif, les expressions des variables de base en fonction des variables hors base. On a

$$-3x_1 - x_2 + Ma_2 + Ma_3$$

$$= -3(1 - e_2 + a_2 - a_3) - \left(\frac{6}{4} + 2e_2 - 2a_2 + \frac{3}{2}a_3\right) + Ma_2 + Ma_3$$

$$= -\frac{9}{2} + e_2 + (M-1)a_2 + \left(M+\frac{3}{2}\right)a_3$$

Étant donné que $e_2 = a_2 = a_3 = 0$, la valeur de l'objectif est donc $-9/2$. On récupère enfin le tableau

x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	
0	0	1	0	0	$-1/2$	$1/2$
0	1	0	-2	2	$-3/2$	$6/4$
1	0	0	1	-1	1	1
0	0	0	1	$(M-1)$	$(M+3/2)$	$-9/2$

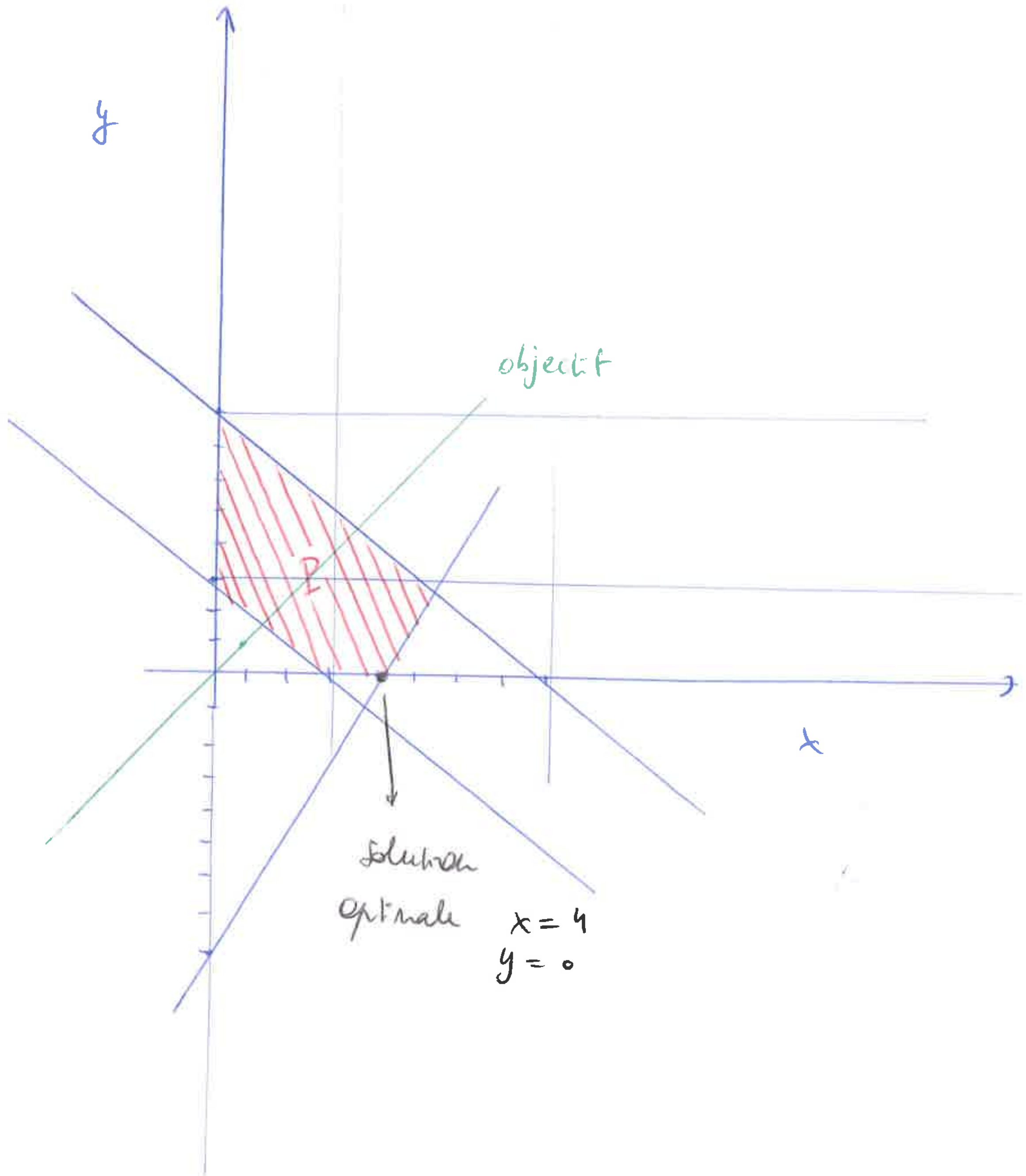
Question 4

On commence par réécrire le problème

$$\min \quad y - x$$

$$\begin{aligned}
y - 2x &\geq -8 \quad \rightarrow & y &\geq -8 + 2x \\
y + x &\leq 8 & y &\leq 8 - x \\
y + x &\geq 3 & y &\geq 3 - x \\
x, y &\geq 0
\end{aligned}$$

17



Pour résoudre le problème à l'aide de la méthode "grand M" on commence par réécrire ce donner sous la forme suivante

$$\min \quad y - x + M a_1$$

$$2x - y + s_1 = 8$$

$$y + x + s_2 = 8$$

$$y + x - s_3 + a_1 = 3$$

$$x, y, s_1, s_2, s_3, a_1 \geq 0$$

le premier tableau donne

2	-1	1	0	0	0	8
1	1	0	1	0	0	8
1	1	0	0	-1	1	3
-1	1	0	0	0	M	

On commence par supprimer le M ce qui donne le tableau

$$L_4' \leftarrow L_4 - M L_3$$

2	-1	1	0	0	0	8	
1	1	0	1	0	0	8	
1	1	0	0	-1	1	3	← sortante
-1-M	1-M	0	0	M	0	-3M	

entrante

de façon à obtenir le tableau suivant, on implémente les opérations

$$L_2' \leftarrow L_2 - L_3$$
$$L_1' \leftarrow L_1 - 2L_3$$
$$L_4' \leftarrow L_4 + (1+M) L_3$$

le tableau résultant est alors donné par

0	-3	1	0	2	-2	2
0	0	0	1	1	-1	5
1	1	0	0	-1	1	3
0	2	0	0	-1	1+M	3

Question 4 (suite)

0	-3	1	0	2	-2	2	$\to$ sortante
0	0	0	1	1	-1	5	
1	1	0	0	-1	1	3	
0	2	0	0	-1	$1+M$	3	
				entrante			

Finalement, en appliquant la mise à jour

$$L_1' \leftarrow L_1/2$$
$$L_2' \leftarrow L_2 - L_1'$$
$$L_3' \leftarrow L_3 + L_1'$$
$$L_4' \leftarrow L_4 + L_1'$$

On obtient le tableau

0	$-3/2$	$1/2$	0	1	-1	1
0	$3/2$	$-1/2$	1	0	0	4
1	$-1/2$	$1/2$	0	0	0	4
0	$1/2$	$1/2$	0	0	$M-1$	4

dont la solution optimale est donnée par $x=4$, $y=0$