Introduction à l'optimisation

Devoir surveillé 02

augustin.cosse@univ-littoral.fr

Avril 2023

Nom : Prénom :

Total: 22 points
Instructions générales: Le devoir comprend 4 questions. Un ensemble de cases blanches ont été prévues pour les développements et réponses. Vous êtes cependant libres de rédiger vos réponses sur des pages supplémentaires en veillant toutefois à bien indiquer le numéro de chaque question. Une fois l'examen terminé, Assurez vous de bien écrire votre nom (de façon lisible) sur chacune des pages. Répondez à un maximum de questions, en commençant par les questions qui vous semblent les plus abordables. .

Question 1 (5pts) *Résoudre le problème suivant en utilisant la méthode du simplexe (On veillera à bien détailler chaque étape)*

$$\begin{array}{lll} \max & 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + 1 & \\ s.t. & x_1 + 2x_3 + x_4 + x_2 & \leq 5 \\ & 3x_1 + 4x_3 - x_4 & \leq 10 \\ & x_3 - x_2 - x_4 & = 1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 & \end{array} \tag{1}$$

Question 2 (5pts) *On dispose du tableau de simplexe suivant, correspondant à la* <u>*dernière*</u> *étape d'un problème de minimisation. Donner* <u>*l'ensemble des valeurs*</u> *de* a_1, a_2, a_3, *c et d, de façon à ce que le tableau corresponde respectivement à*

1. *Une solution optimale (pour un problème qui admet une unique solution optimale)*
2. *Une solution optimale (pour un problème qui admet plusieurs solutions optimales)*
3. *Un problème non borné (dans ce dernier cas, on supposera* $d \geq 0$*)*
4. *Une solution de base qui n'est pas une solution de base admissible.*

$$
\begin{array}{ccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\
\hline
-1 & a_1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\
a_2 & -4 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
a_3 & 3 & 0 & 0 & 1 & d \\
\hline
-c & 2 & 0 & 0 & 0 & 10
\end{array}
\qquad (2)
$$

Question 3 (5pts) *On considère le programme linéaire donné en* (3) *et dont le tableau final est donné en* (4). *Le vecteur des coûts réduits, ainsi que le membre de droite ont été effacés. En supposant que les variables* s_1 *(respectivement* e_2*)*[1] *représentent les variables de slack positives (resp. négatives) et que* a_2 *et* a_3 *représentent les variables artificielles, retrouver les éléments manquants du tableau (on supposera que l'auteur du tableau s'est basé sur la méthode grand M).*

$$
\begin{aligned}
\min \quad & -3x_1 - x_2 \\
s.t. \quad & 2x_1 + x_2 \leq 4 \\
& 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\
& 4x_1 + 2x_2 = 7 \\
& x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

$$
\begin{array}{cccccc|c}
x_1 & x_2 & s_1 & e_2 & a_2 & a_3 & \\
\hline
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & \\
0 & 1 & 0 & -2 & 2 & -3/2 & \\
1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & \\
\hline
 & & & & & &
\end{array}
\tag{4}
$$

[1] On a donc $2x_1 + x_2 + s_1 = 4$ pour la première contrainte et $3x_1 + 2x_2 - e_2 = 6$ pour la seconde contrainte

Question 4 (7pts) *On considère le problème suivant:*

$$\min \quad y - x \tag{5}$$
$$s.t. \quad y - 2x \geq -8 \tag{6}$$
$$y + x \leq 8 \tag{7}$$
$$y + x \geq 3 \tag{8}$$
$$x, y \geq 0 \tag{9}$$

1. [2pts] *Esquisser l'ensemble admissible*
2. [5pts] *Résoudre le problème à l'aide de la méthode grand-M.*