Examen ING1-AGRO EILCO - Analyse Numérique

Janvier 2023

Nom :   Prénom :

Total : 29 points
Durée : 2h
Instructions générales : L'examen comprend 2 parties (Chacune de ces parties reprenant différentes sous-questions). Vous êtes libres de rédiger vos réponses sur des pages supplémentaires en veillant toutefois à bien indiquer le numéro de chaque question. Une fois l'examen terminé, Assurez vous de bien écrire votre nom (de façon lisible) sur chacune des pages. Répondez à un maximum de questions, en commençant par les questions qui vous semblent les plus abordables.

Partie 1 (Interpolation et quadrature – 14pts)

1. [5*pts*] *Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses*

Vrai / Faux	*Un polynôme d'interpolation de degré n est défini de manière unique par $n+1$ points distincts*
Vrai / Faux	*Les abscisses conduisant à la borne minimale sur l'erreur d'interpolation sont donnés par les zéros des polynômes de Chebyshev*
Vrai / Faux	*Les règles du rectangle à gauche et à droite sont exactes pour toute fonction constante $f(x) = c$*
Vrai / Faux	*Il est possible de déterminer les constantes c_0 et c_1 de façon à ce que la règle de quadrature $\int_0^1 f(x)\,dx = c_0 f(0) + c_1 f(1)$ soit exacte pour tout polynôme de degré au plus égal à 1.*
Vrai / Faux	*L'erreur $\lvert f - p_n(x)\rvert$ commise par un polynôme d'interpolation de degré n peut être bornée par un polynôme de degré $n+1$*
Vrai / Faux	*La formule de quadrature de Newton-Cotes définie sur $n+1$ points s'obtient en intégrant le polynôme d'interpolation de Lagrange défini sur ces $n+1$ points*
Vrai / Faux	*Pour un n impair, la règle de Newton-Cotes d'ordre n (i.e. définie sur $n+1$ points) a un degré de précision égal à $n+1$*

2. [3*pts*] *On souhaite construire le polynôme d'interpolation passant par les points $(x_0, y_0) = (1, 1)$, $(x_1, y_1) = (2, 2)$ et $(x_2, y_2) = (3, 1)$. Pour ce faire on procédera comme suit :*
   (a) [2*pts*] *Donner l'expression générale des polynômes d'interpolation de Lagrange $L_0(x)$, $L_1(x)$ et $L_2(x)$*
   (b) [1*pt*] *En déduire l'expression du polynôme d'interpolation $p_3(x)$.*
3. [4*pts*] *On considère l'intégrale suivante*

$$\int_1^5 \frac{1}{x}\,dx$$

dont la valeur exacte est donnée par $\int_1^5 \frac{1}{x}\, dx = \log(5) = 1.6094$ *et pour laquelle on souhaite étudier différentes formules de quadrature.*

(a) [1pt] *Commencer par calculer l'approximation de l'intégrale donnée par la formule composite des rectangles à gauche sur 4 sous-intervalles. Comparer le résultat à la valeur exacte de l'intégrale.*

(b) [1pt] *Calculer l'approximation de l'intégrale donnée par la formule composite des rectangles à droite sur les mêmes 4 sous-intervalles. Comparer le résultat à la valeur exacte de l'intégrale.*

(c) [1pt] *En se basant sur les réponses données aux points précédents, proposer une formule de quadrature originale permettant d'améliorer les approximations obtenues dans le cadre de ces deux premiers points.*

(d) [1pt] *Approximer l'intégrale à l'aide de la méthode du Trapèze (1 seul sous-intervalle) et fournir la valeur d'approximation.*

4. [2pts] *On considère le tableau des différences divisées de Newton donné à la Table 1. On souhaite utiliser ce tableau afin de déterminer les coefficients du polynôme d'interpolation* $p_4(x)$ *passant par les points* $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $(x_1, y_1) = (1, 2)$, $(x_2, y_2) = (3, 8)$, $(x_3, y_3) = (4, 9)$. *On souhaite écrire* $p_3(x)$ *sous la forme suivante :*

$$p_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x(x-1) + a_3 x(x-1)(x-3)$$

Donner la valeur des coefficients a_0, a_1, a_2 *et* a_3.

0	0			
		2		
1	2		1/3	
		3		-1/4
3	8		-2/3	
		1		
4	9			

TABLE 1 – Schéma de différences divisées utilisé à la question 1.4.

Partie 2 (Transformée de Laplace et transformée de Fourier – 15pts)

1. [5pts] *Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses*

Vrai / Faux	*La transformée de Laplace de la fonction* $f(t) = 1$ *n'existe pas en zéro*
Vrai / Faux	*La transformée de Laplace de la fonction* $f(t) = t$ *n'existe pas*
Vrai / Faux	*Soit* f *une fonction dont la transformée de Laplace prend la valeur* 1 *en* $s = 0$. *La transformée* $\mathcal{L}\left\{e^{\alpha t} f(t)\right\}$ *prend la valeur* 1 *en* $s = \alpha$
Vrai / Faux	*Soit* f *une fonction périodique de période* $2L$ *dont la série de Fourier est donnée par* $f(t) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \dfrac{m\pi x}{L} + b_m \sin \dfrac{m\pi x}{L}$. *Sachant que* $f(t) = f(-t)$, *on peut en déduire que* $a_m = 0$ *pour tout* $m \geq 0$
Vrai / Faux	*Soit* f *une fonction périodique de période* $2L$ *dont la série de Fourier est donnée par* $f(t) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \dfrac{m\pi x}{L} + b_m \sin \dfrac{m\pi x}{L}$. *Sachant que* $f(t) = f(-t)$, *on peut en déduire que* $b_m = 0$ *pour tout* $m \geq 1$
Vrai / Faux	*La fonction* $f(x) = e^{x^2}$ *est d'ordre exponentiel* $\alpha = 1$
Vrai / Faux	$\displaystyle\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\, dx = \int_{2L}^{4L} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\, dx$
Vrai / Faux	*Soit la fonction* $f(x) = x$ *définie sur l'intervalle* $-1 \leq x < 1$. *Tous les coefficients de Fourier de* f *sont non nuls.*
Vrai / Faux	*Les coefficients de la série de Fourier de* $f(t) + g(t)$ *peuvent être obtenus en sommant les coefficients des séries de Fourier de* $f(t)$ *et* $g(t)$.

2. [4pts] *On considère la fonction* 2π*-périodique* $f(t)$ *représentée à la figure 2 et définie par*

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq \pi \\ \pi & \pi \leq t < 2\pi \end{cases}$$

Donner les coefficients de Fourier de f. *En déduire la série de Fourier de cette même fonction.*

3. [4pts] *Soit la transformée de Laplace* $H(s) = \frac{2}{(s-3)^3}$. *On souhaite calculer la transformée de Laplace inverse de* $H(s)$, $\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$. *Pour ce faire, on procédera comme suit :*
   (a) [2pts] *Calculer la transformée de Laplace de la fonction* $f(t) = t$
   (b) [1pts] *En déduire la transformée de Laplace de* $g(t) = t^2$
   (c) [1pts] *Finalement, à partir des résultats précédents, déduire la transformée inverse* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-3)^3}\right\}$

4. [2pts] *On considère la figure 1. Dans cette figure sont respectivement représentées : (i) une fonction* $f(t)$, *(ii) une approximation de cette fonction au moyen des premiers coefficients de la série de Fourier (somme partielle) et (iii) la fonction vers laquelle la série de Fourier converge. Indiquer la correspondance entre les figures (A) - (C) et les légendes (i) - (iii)*

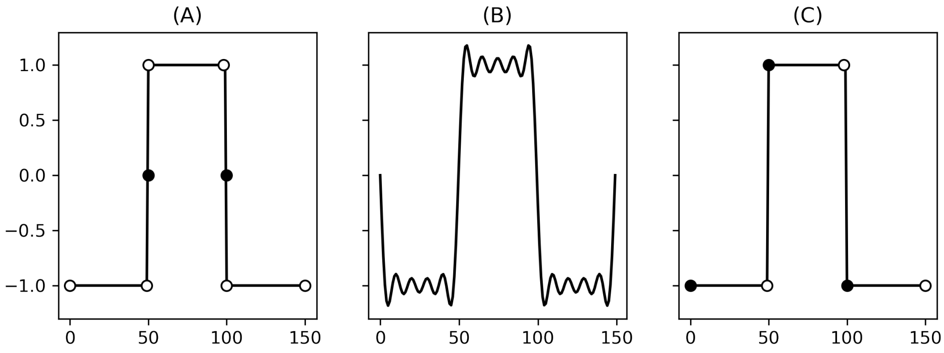

FIGURE 1 – Figure utilisée à la question 2.4. Un point noir représente la valeur prise par la fonction (ex. dans la première figure, la fonction $f(t)$ prend la valeur 0 en $t = 50$).

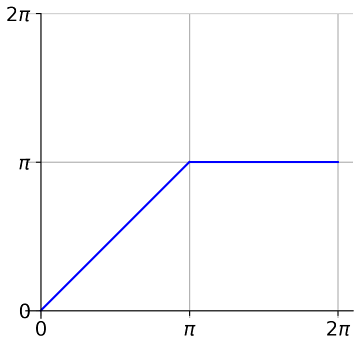

FIGURE 2 – Figure utilisée à la question 2.2.