Analyse Numérique
Devoir 1

Total : 20pts
Date de début: Vendredi 17 Novembre
Date de fin: Vendredi 02 Janvier

Augustin Cosse
augustin.cosse@univ-littoral.fr

Octobre 2022

Question 1 (5pts) *L'entreprise* Les Chalutiers Calaisiens *a remarqué une diminution de la quantité de poissons pêchés en mer du nord ces dernières années. Les masses recoltées (en tonnes) sur les années 2020, 2021, 2022 et 2023 sont reprises au tableau 1 ci dessous. La machine qui pèse habituellement la masse de poisson ramenée par le chalutier est malheureusement tombée en panne en 2023 et la société, qui ne pouvait pas se permettre de racheter une nouvelle machine de comptage, n'a donc pas pu relever correctement la totalité du résultat annuel. L'incertitude sur le nombre de poissons pêchés en 2023 est représentée par la lettre ε. L'entreprise*

Année	2020	2021	2022	2023
Masse	1000	1100	1050	$600 + \varepsilon$

Table 1: Données de l'entreprise *Les Chalutiers Calaisiens*

souhaite déterminer si elle doit réorganiser ses zones de pêche ou si la baisse est simplement temporaire. Pour aider Les Chalutiers Calaisiens a résoudre leur dilemme, on souhaite répondre aux questions ci-dessous:

- *(2pts) On commencera par supposer que l'erreur commise par la machine est négligeable (i.e. $\varepsilon = 0$). Dans ce premier cas de figure, utiliser le polyôme d'interpolation afin de déterminer si la baisse du nombre de poissons va continuer sur 2024. (Il s'avérera judicieux de numéroter les années* 2020 *à* 2023 *de* 1 *à* 4 *et de considérer des quantités de poissons en milliers de tonnes afin de simplifier les calculs)*
- *(2pts) Dans un second temps, on souhaite étudier l'impact de l'erreur sur la tendance du nombre de poissons pêchés. Déterminer la valeur maximale de ε pour laquelle* 2024 *pourra être considéré comme une troisième année de baisse consécutive.*

- *(1pt) Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $\ell_j(x)$, $j = 0, \ldots, n$ les polynômes de Lagrange de degré n définis sur les $n+1$ points $x_0, x_1, \ldots x_n$. Montrer que $\sum_{i=0}^{n} \ell_i(x) = 1$.*

Question 2 (3pts) *Pour rappel, les polynômes de Chebyshev de première espèce sont définis par $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ et satisfont la relation de récurrence*

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x \tag{1}$$

- *Montrer que pour tout $m > n$, on a*

$$T_{m+n} + T_{m-n} = 2T_m T_n \tag{2}$$

Question 3 (7pts) *La topologie des brins d'ADN peut être décrite par plusieurs paramètres mathématiques: l'"enlacement", le "twist" et l'"entortillement". Dans le cas d'un modèle hélicoïdal caractérisé par un axe défini par une courbe plane de courbure positive, le twist du brin d'ADN peut être réduit à l'intégrale suivante:*

$$T_w = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi n} \left((1 - r k_A \cos\theta)^2 + r^2\alpha^2 \right)^{-1/2} d\theta \tag{3}$$

ou $\alpha = 2\pi n/L$. r est le rayon de l'hélice, L est la longueur de l'axe et n est le nombre d'enroulements autour de l'axe. Finalement k_A représente la courbure de l'axe A. Afin de mieux comprendre l'impact de la topologie sur les propriétés physiques et chimiques du brin d'ADN, on souhaite estimer le twist d'un brin particulier.

1. *(2pts) Donner l'expression générale de la formule de quadrature de Simpson. Quel est le degré de précision de cette formule?*
2. *(3pts) En utilisant la formule de quadrature donnée au point précédent, calculer une valeur approchée pour le twist d'un brin d'ADN caractérisé par les paramètres $r = 1$, $n = 10$, $k_A = .1$ et $L = 3$.*

L'entortillement d'un brin est défini de manière semblable au twist à partir de l'axe, via la formule

$$E = \frac{1}{4\pi} \int_0^L \int_0^L \frac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds} \cdot \left(\frac{d\boldsymbol{r}(s')}{ds'} \times \frac{\boldsymbol{r}(s') - \boldsymbol{r}(s)}{\|\boldsymbol{r}(s) - \boldsymbol{r}(s')\|^3} \right) ds\, ds' \tag{4}$$

où $\boldsymbol{r}(s) = (r_1(s), r_2(s), r_3(s))$ représente la paramétrisation de l'axe; $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$ représente le produit scalaire de $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$; et $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ représente le produit vectoriel

$$(v_1, v_2, v_3) \times (w_1, w_2, w_3) = [v_2 w_3 - v_3 w_2, -(v_1 w_3 - v_3 w_1), v_1 w_2 - v_2 w_1] \tag{5}$$

Finalement $\|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}\|^3 = \left((v_1 - w_1)^2 + (v_2 - w_2)^2 + (v_3 - w_3)^2 \right)^{3/2}$

3. *(2pts) On considère un axe donné par la paramétrisation* $\mathbf{r}(s) = (\cos(s), \sin(s), s)$. *En utilisation une formule du point médian sur* 2×2 *sous domaines, estimer l'entortillement du brin d'ADN correspondant.*

Question 4 (6pts) *on considère l'intégrale suivante:*

$$I = \int_0^1 \frac{\cos(x)}{2 - \sin(3x)} e^{x^2} \, dx \tag{6}$$

1. *(2pts) Donner (sans utiliser la calculatrice) une évaluation de cette intégrale à l'aide de la formule de quadrature de Simpson en considérant un unique intervalle (il n'est pas nécessaire de simplifier les calculs).*

2. *(2pts) Donner (sans utiliser la calculatrice) une expression de cette intégrale une utilisant une version composite de la règle du point médian sur n sous-intervalles (il n'est pas nécessaire de simplifier les calculs).*

3. *(2pts) En utilisant votre calculatrice, mais sans calculer l'intégrale, déterminer le nombre minimal d'intervalles nécessaires pour que la règle composite du point médian retourne un résultat supérieur à la règle de Simpson.*