

# Analyse Numérique

## Exercices supplémentaires

Augustin Cosse  
[augustin.cosse@univ-littoral.fr](mailto:augustin.cosse@univ-littoral.fr)

January 2022

**Question 1** Calculer la valeur en  $x = 2$  du polynôme d'interpolation aux points  $(x_0, y_0) = (0, 1)$ ,  $(x_1, y_1) = (1, 3)$ ,  $(x_2, y_2) = (3, 2)$ .

**Question 2** Le partage de clé secrète de Shamir (*Shamir's secret Sharing*) est un algorithme de cryptographie imaginé par Adi Shamir. L'idée consiste à partager un secret à plusieurs agents de sorte qu'un nombre minimum d'entre eux est nécessaire à la récupération du secret. L'idée de Shamir peut être implémentée à l'aide de polynômes d'interpolation de Lagrange comme suit. Supposons qu'on souhaite partager un secret entre  $n$  agents, de telle sorte que  $k$  d'entre eux soient nécessaires à la récupération de l'information, on peut alors procéder en choisissant  $k - 1$  coefficients  $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$ . On pose en outre  $a_0 = s$  ou  $s$  représente le secret. à l'aide des coefficients, on construit ensuite le polynôme

$$p(x) = s + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{k-1}x^{k-1}$$

à partir duquel on génère  $n$  paires distinctes  $(z, p(z))$ . Chaque participant se voit attribuer une paire. Étant donné  $k$  participants, il est alors possible de retrouver le secret  $s$ . Retrouver le secret partagé par Jean, Alice et Bob et dont les cés sont données ci dessous

|       |       |
|-------|-------|
| Jean  | (1,2) |
| Alice | (0,1) |
| Bob   | (2,1) |

**Question 3** Construire le polynôme d'interpolation de degré 2 pour la fonction  $f : x \mapsto e^x$  sur l'intervalle  $[-1, 1]$  aux points d'interpolation  $x_0 = -1$ ,  $x_1 = 0$  et  $x_2 = 1$

**Question 4** On considère le polynôme d'interpolation de degré 2 aux points d'abscisse  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = a$ . Sachant que les ordonnées des points d'interpolation sont données par  $y_0 = 1$ ,  $y_1 = -1$ ,  $y_2 = 1$ , pour quelle valeur de  $a$  le polynôme prend-il la valeur  $-5$  en  $x = 2$ .

**Question 5** on considère les points d'interpolation suivants:  $(1, 1)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(3, 1)$  et  $(4, 1)$ . Parmi les polynômes suivants, lequel correspond à un polynôme d'interpolation?

$$p(x) = \frac{x^4}{7} - 3x^3 + \frac{5}{3}x^2 - x + 1$$

$$p(x) = \frac{x^3}{2} - 4x^2 + \frac{19x}{2} - 5$$

$$p(x) = x^2 + 3x - 2$$

$$p(x) = \frac{x^3}{2} - 3x^2 + 5x - 1$$

**Question 6** On considère le polynôme d'interpolation suivant:

$$\begin{aligned} p(x) = & -\frac{(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)}{5!} \\ & + 2\frac{(x-1)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)}{4!} \\ & + \frac{3}{2}\frac{(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)(x-6)}{3!} \\ & + 4\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)(x-6)}{3!2!} \\ & - 5\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-6)}{4!} \\ & + 6\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{5!} \end{aligned}$$

Parmi les affirmations suivantes, laquelle est correcte?

$$p(x) = x^3 + \frac{1}{5}x^2 + 2x - \frac{4}{3}$$

$$p(x) = x$$

$$p(x) = x^5 + 4x^4 + \frac{6}{5}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}$$

**Question 7** Construire le polynôme d'interpolation cubique  $p_3$  satisfaisant les conditions suivantes:

$$p_3(0) = 0, \quad p_3(1) = 1, \quad p_3'(0) = 1, \quad p_3'(1) = 0$$

**Question 8** On considère les points d'interpolation suivants

|       |           |
|-------|-----------|
| $p_1$ | $(-1, 0)$ |
| $p_2$ | $(0, -1)$ |
| $p_3$ | $(1, 0)$  |
| $p_4$ | $(2, 2)$  |
| $p_5$ | $(3, 0)$  |
| $p_6$ | $(4, -1)$ |
| $p_7$ | $(5, 0)$  |
| $p_8$ | $(6, 2)$  |

Parmi les polynômes ci-dessous, lequel correspond au polynôme d'interpolation? (Il n'y a pas besoin de calculatrice)

$$p(x) = 0.0087x^7 - 0.1611x^6 + 1.0778x^5 - 2.9444x^4 + 1.7611x^3 + 4.1056x^2 - 2.8476x - 1$$

$$p(x) = 1.1006x^7 + 1.5442x^6 + 0.0859x^5 - 1.4916x^4 - 0.7423x^3 - 1.0616x^2 + 2.3505x - 0.6156$$

$$p(x) = 0.7481x^7 - 0.1924x^6 + 0.8886x^5 - 0.7648x^4 - 1.4023x^3 - 1.4224x^2 - 0.4882x - 0.1774$$

$$p(x) = -0.1961x^7 + 1.4193x^6 + 0.2916x^5 + 0.1978x^4 + 1.5877x^3 - 0.8045x^2 + 0.6966x + 0.8351$$

**Question 9** Parmi les polynômes suivants, lequel correspond au polynôme d'interpolation aux points  $(0, 0)$ ,  $(1, -1)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(3, 0)$

$$p(x) = 2x^3 + 3x^2 - x$$

$$p(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2.5x^2 - 3x$$

$$p(x) = 3.2x^3 + 2x^2 + 1.3x - 1$$

$$p(x) = x^3 + 2x^2$$

**Question 10** En utilisant les polynômes d'interpolation de Lagrange  $\ell_k(x)$ , dériver le polynôme d'interpolation pour chacune des données d'interpolation suivantes

- $(1, 1), (2, 2), (3, 2)$
- $(4, 2), (1, 2)$
- $(1, 3), (2, 0), (3, 2), (1, 3)$
- $(0, 0), (-1, 0), (1, 0), (2, 0), (1.5, 0), (\pi, 0), (5.362, 0)$ .

**Question 11** Donner le tableau des différences divisées pour les points d'interpolation suivants:  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 3$ ,  $x_4 = 4$  et les valeurs  $y_0 = 0$ ,  $y_1 = 2$ ,  $y_2 = 8$  et  $y_4 = 9$ . Construire le polynôme d'interpolation correspondant.

**Question 12** On considère la fonction  $x \mapsto f(x) = \cos(x)$ . Donner le polynôme d'approximation de cette fonction aux points d'abscisse  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = \pi$ ,  $x_2 = 2\pi$ ,  $x_3 = 3\pi$ . répéter le calcul pour les points  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = \pi/2$ ,  $x_2 = \pi$ ,  $x_3 = 3\pi/2$ . Comparer les deux polynômes.

**Question 13** Trouver les polynômes de degré minimum qui interpolent les points suivants:

- a)  $x_0 = 3$ ,  $f(x_0) = 5$ ,  $x_1 = 7$ ,  $f(x_1) = -1$
- b)  $x_0 = 3$ ,  $f(x_0) = 12$ ,  $x_1 = 7$ ,  $f(x_1) = 146$ ,  $x_2 = 1$ ,  $f(x_2) = 2$
- c)  $x_0 = 1.5$ ,  $f(x_0) = 0$ ,  $x_1 = 2.7$ ,  $f(x_1) = 0$ ,  $x_2 = 3.1$ ,  $f(x_2) = 0$ ,  $x_3 = -2.1$ ,  $f(x_3) = 1$

**Question 14** Montrer que si  $g$  interpole  $f$  aux points  $x_0, \dots, x_{n-1}$  et si  $h$  interpole  $f$  aux points  $x_1, \dots, x_n$  alors

$$g(x) + \frac{x_0 - x}{x_n - x_0}(g(x) - h(x))$$

interpole  $f$  aux points  $x_0, \dots, x_n$

**Question 15** Calculer le tableau des différences divisées pour les données suivantes :

a)  $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, f(x) \in \{2, 1, 2, -7, 10\}$

b)  $x \in \{4, 2, 0, 3\}, f(x) \in \{64, 11, 7, 28\}$