Analyse Numérique
Exercices supplémentaires

Augustin Cosse
augustin.cosse@univ-littoral.fr

January 2022

Question 1 *Calculer la valeur en* $x = 2$ *du polynôme d'interpolation aux points* $(x_0, y_0) = (0, 1), (x_1, y_1) = (1, 3), (x_2, y_2) = (3, 2)$.

Question 2 *Le partage de clé secrète de Shamir (Shamir's secret Sharing) est un algorithme de cryptographie imaginé par Adi Shamir. L'idée consiste à partager un secret á plusieurs agents de sorte qu'un nombre minimum d'entre eux est nécessaire à la récupération du secret. L'idée de Shamir peut êter implémetée à l 'aide de polynômes d interpolation de Lagrange comme suit. Supposons qu'on souhaite partager un secret entre* n *agents,de telle sorte que* k *d'entre eux soient nécessaires à la récupération de l'information, on peut alors procéder en choisissant* $k-1$ *coefficients* $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$. *On pose en outre* $a_0 = s$ *ou* s *représente le secret. à l aide des coefficients, on construit ensuite le polynôme*

$$p(x) = s + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{k-1} x^{k-1}$$

à partir duquel on gén'ere n *paires distinctes* $(z, p(z))$. *Chaque participant se voit attribuer une paire. Étant donné* k *participants, il est alors possible de retrouver le secret* s. *Retrouver le secret partagé par Jean, Alice et Bob et dont les cés sont données ci dessous*

Jean	*(1,2)*
Alice	*(0,1)*
Bob	*(2,1)*

Question 3 *Construire le polynôme d'interpolation de degré* 2 *pour la fonction* $f : x \mapsto e^x$ *sur l'intervalle* $[-1, 1]$ *aux points d'interpolation* $x_0 = -1, x_1 = 0$ *et* $x_2 = 1$

Question 4 *On considère le polynôme d'interpolation de degré* 2 *aux points d'abscisse* $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = a$. *Sachant que les ordonnées des points d'interpolation sont données par* $y_0 = 1, y_1 = -1, y_2 = 1$, *pour quelle valeur de* a *le polynôme prend-il la valeur* -5 *en* $x = 2$.

Question 5 *on considère les points d'interpolation suivants:* $(1,1)$*,* $(2,2)$*,* $(3,1)$ *et* $(4,1)$*. Parmi les polynômes suivants, lequel correspond à un polynôme d'interpolation?*

$$
\begin{aligned}
p(x) &= \frac{x^4}{7} - 3x^3 + \frac{5}{3}x^2 - x + 1 \\
p(x) &= \frac{x^3}{2} - 4x^2 + \frac{19x}{2} - 5 \\
p(x) &= x^2 + 3x - 2 \\
p(x) &= \frac{x^3}{2} - 3x^2 + 5x - 1
\end{aligned}
$$

Question 6 *On considère le polynôme d'interpolation suivant:*

$$
\begin{aligned}
p(x) = &-\frac{(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)}{5!} \\
&+ 2\frac{(x-1)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)}{4!} \\
&+ -\frac{3}{2}\frac{(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)(x-6)}{3!} \\
&+ 4\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)(x-6)}{3!2!} \\
&- 5\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-6)}{4!} \\
&+ 6\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{5!}
\end{aligned}
$$

Parmi les affirmations suivantes, laquelle est correcte?

$$
\begin{aligned}
p(x) &= x^3 + \frac{1}{5}x^2 + 2x - \frac{4}{3} \\
p(x) &= x \\
p(x) &= x^5 + 4x^4 + \frac{6}{5}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Question 7 *Construire le polynôme d'interpolation cubique* p_3 *satisfaisant les conditions suivantes:*

$$p_3(0) = 0, \quad p_3(1) = 1, p_3'(0) = 1, p_3'(1) = 0$$

Question 8 *On considère les points d'interpolation suivants*

p_1	$(-1,0)$
p_2	$(0,-1)$
p_3	$(1,0)$
p_4	$(2,2)$
p_5	$(3,0)$
p_6	$(4,-1)$
p_7	$(5,0)$
p_8	$(6,2)$

Parmi les polynômes ci-dessous, lequel correspond au polynôme d'interpolation? (Il n'y a pas besoin de calculatrice)

$p(x) = 0.0087x^7 - 0.1611x^6 + 1.0778x^5 - 2.9444x^4 + 1.7611x^3 + 4.1056x^2 - 2.8476x - 1$
$p(x) = 1.1006x^7 + 1.5442x^6 + 0.0859x^5 - 1.4916x^4 - 0.7423x^3 - 1.0616x^2 + 2.3505x - 0.6156$
$p(x) = 0.7481x^7 - 0.1924x^6 + 0.8886x^5 - 0.7648x^4 - 1.4023x^3 - 1.4224x^2 0.4882x - 0.1774$
$p(x) = -0.1961x^7 + 1.4193x^6 + 0.2916x^5 + 0.1978x^4 + 1.5877x^3 - 0.8045x^2 + 0.6966x + 0.8351$

Question 9 *Parmi les polynômes suivants, lequel correspond au polynôme d'interpolation aux points* $(0,0)$, $(1,-1)$ $(2,0)$ $(3,0)$

$$p(x) = 2x^3 + 3x^2 - x$$
$$p(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2.5x^2 - 3x$$
$$p(x) = 3.2x^3 + 2x^2 + 1.3x - 1$$
$$p(x) = x^3 + 2x^2$$

Question 10 *En utilisant les polynômes d'interpolation de Lagrange $\ell_k(x)$, dérive le polynôme d'interpolation pour chacune des données d'interpolation suivantes*

- $(1,1), (2,2), (3,2)$
- $(4,2), (1,2)$
- $(1,3), (2,0), (3,2), (1,3)$
- $(0,0), (-1,0), (1,0), (2,0), (1.5,0), (\pi,0), (5.362,0)$.

Question 11 *Donner le tableau des différences divisées pour les points d'interpolation suivants: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_4 = 4$ et les valeurs $y_0 = 0, y_1 = 2, y_2 = 8$ et $y_4 = 9$. Construire le polynôme d'interpolation correspondant.*

Question 12 *On considère la fonction $x \mapsto f(x) = \cos(x)$. Donner le polynôme d'approximation de cette fonction aux points d'abscisse $x_0 = 0, x_1 = \pi, x_2 = 2\pi, x_3 = 3\pi$. répéter le calcul pour les points $x_0 = 0, x_1 = \pi/2, x_2 = \pi, x_3 = 3\pi/2$. Comparer les deux plynômes.*

Question 13 *Trouver les polynômes de degré minimum qui interpolent les points suivants:*

a) $x_0 = 3, \quad f(x_0) = 5, \quad x_1 = 7, \quad f(x_1) = -1$

b) $x_0 = 3, \quad f(x_0) = 12, \quad x_1 = 7, \quad f(x_1) = 146, \quad x_2 = 1, \quad f(x_2) = 2$

c) $x_0 = 1.5, \quad f(x_0) = 0, \quad x_1 = 2.7, \quad f(x_1) = 0, \quad x_2 = 3.1, \quad f(x_2) = 0, \quad x_3 = -2.1, \quad f(x_3) = 1$

Question 14 *Montrer que si g interpole f aux points $x_0, \ldots, x_{n-1}$ et si h interpole f aux points $x_1, \ldots, x_n$ alors*

$$g(x) + \frac{x_0 - x}{x_n - x_0}(g(x) - h(x))$$

interpole f aux points $x_0, \ldots, x_n$

Question 15 *Calculer le tableau des différences divisées pour les données suivantes :*

a) $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $f(x) \in \{2, 1, 2, -7, 10\}$

b) $x \in \{4, 2, 0, 3\}$, $f(x) \in \{64, 11, 7, 28\}$