Devoir surveillé #2

Solutions

Question 1

On considère le problème

$$\begin{aligned}
\max \quad & 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + 1 \\
\text{s.t} \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 5 \\
& 3x_1 + 4x_3 - x_4 \leq 10 \\
& -x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

On commence par utiliser la contrainte d'égalité afin de se débarrasser d'une des variables. Par exemple $x_4 = x_3 - x_2 - 1$

En substituant l'expression de x_4 dans les autres contraintes, on obtient le problème

$$\begin{aligned}
\max \quad & 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_3 - x_2 - 1 + 1 \\
& x_1 + 2x_3 + x_3 - x_2 - 1 + x_2 \leq 5 \\
& 3x_1 + 4x_3 - (x_3 - x_2 - 1) \leq 10 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

Simplifiant, on obtient

$$\max \quad 2x_1 + x_2 - x_3$$
$$\text{s.t} \quad x_1 + 3x_3 \leq 6$$
$$3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 9$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Sous forme standard, le problème peut donc se réécrire

$$\min \quad -2x_1 - x_2 + x_3$$
$$\text{s.t} \quad x_1 + 3x_3 \leq 6$$
$$3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 9$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Afin de résoudre le problème on applique les itérations de SIMPLEXE en commençant avec le tableau

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 9 \\ \hline -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & \end{array}$$

9 → sortant

−2 ↓ entrante

Pour la première itération, on met à jour le tableau comme suit

$$L_2' \leftarrow L_2/3$$
$$L_1' \leftarrow L_1 - L_2'$$
$$L_3' \leftarrow L_3 + 2L_2'$$

On continue ainsi de suite jusqu'à ne plus avoir aucun coût réduit négatif. On a

0	$-1/3$	2	1	$-1/3$	3
1	$1/3$	1	0	$1/3$	3 → sortante
0	$-1/3$	3	0	$2/3$	6
	↑ entrante				

Pour le tableau suivant, auquel on applique la mise à jour

$$L_1' \leftarrow L_1 + L_2$$

$$L_3' \leftarrow L_3 + L_2$$

$$L_2' \leftarrow L_2 \cdot 3$$

Ce qui donne finalement le tableau

1	0	3	1	0	3
3	1	3	0	1	9
1	0	4	0	1	9

dont tous les coûts réduits sont non-négatifs

La solution finale est donc donnée par $x_2 = 9$ $x_1 = 0$ $x_3 = 0$

Question 2

Une solution optimale pour un problème qui admet une une unique solution — $c < 0$ et $d \geq 0$

Une solution optimale pour un problème qui admet plusieurs solutions optimales — $c = 0$ et $a_2 > 0$ ou $0 < \frac{d}{a_3} < +\infty$

Un problème non borné — $c > 0$ et $a_2 \leq 0$, $\frac{d}{a_3} = \infty$ ou $< \infty$

Une solution de base qui n'est pas solution de base admissible — $d < 0$

Question 3

On commence par réécrire le problème sous forme standard et en utilisant la méthode "grand M"

$$\begin{aligned}
\min \quad & -3x_1 - x_2 + Ma_2 \\
\text{s.t} \quad & 2x_1 + x_2 + s_1 = 4 \\
& 3x_1 + 2x_2 - e_2 + a_2 = 6 \\
& 4x_1 + 2x_2 + a_3 = 7
\end{aligned}$$

Question 3 (suite)

A l'optimum, on doit avoir $e_2 = a_2 = a_3 = 0$
ce qui implique (en substituant dans les contraintes

$$2x_1 + x_2 + s_1 = 4 \quad (*)$$
$$3x_1 + 2x_2 = 6$$
$$4x_1 + 2x_2 = 7$$

En combinant les contraintes, on a donc

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{6-2x_2}{3} = 2 - \dfrac{2}{3}x_2 \\ x_1 = \dfrac{7-2x_2}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow 7 - 2x_2 = 8 - \frac{8}{3}x_2$$

$$\Rightarrow x_2 = 6/4$$

$$x_1 = \frac{7}{4} - \frac{12}{16} = 1$$

et finalement, en utilisant $(*)$

$$s_1 = 4 - x_2 - 2x_1$$
$$= 2 - x_2 = \frac{8}{4} - \frac{6}{4} = 1/2$$

le tableau final doit donc se réécrire

x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	
0	0	1	0	0	$-1/2$	1
0	1	0	-2	2	$-3/2$	$6/4$
1	0	0	1	-1	1	$1/2$
0	0	0	?	?	?	

Question 3 (suite)

pour le vecteur des coûts réduits, on substitue simplement dans la fonction objectif, les expressions des variables de base en fonction des variables hors base. On a

$$-3x_1 - x_2 + Ma_2$$

$$= -3\left(\tfrac{1}{2} - e_2 + a_2 - a_3\right) - \left(\tfrac{6}{4} + 2e_2 - 2a_2 + \tfrac{3}{2}a_3\right) + Ma_2$$

$$= -3 + e_2 - a_2 + \tfrac{3}{2}a_3 + Ma_2$$

$$= -3 + e_2 + (M-1)a_2 + \tfrac{3}{2}a_3$$

étant donné que $e_2 = a_2 = a_3 = 0$, la valeur de l'objectif est donc -3

On récupère donc le tableau

x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	
0	0	1	0	0	$-1/2$	1
0	1	0	-2	2	$-3/2$	$6/4$
1	0	0	1	-1	1	$1/2$
0	0	0	1	$(M-1)$	$3/2$	3

Question 4 On commence par réécrire le problème

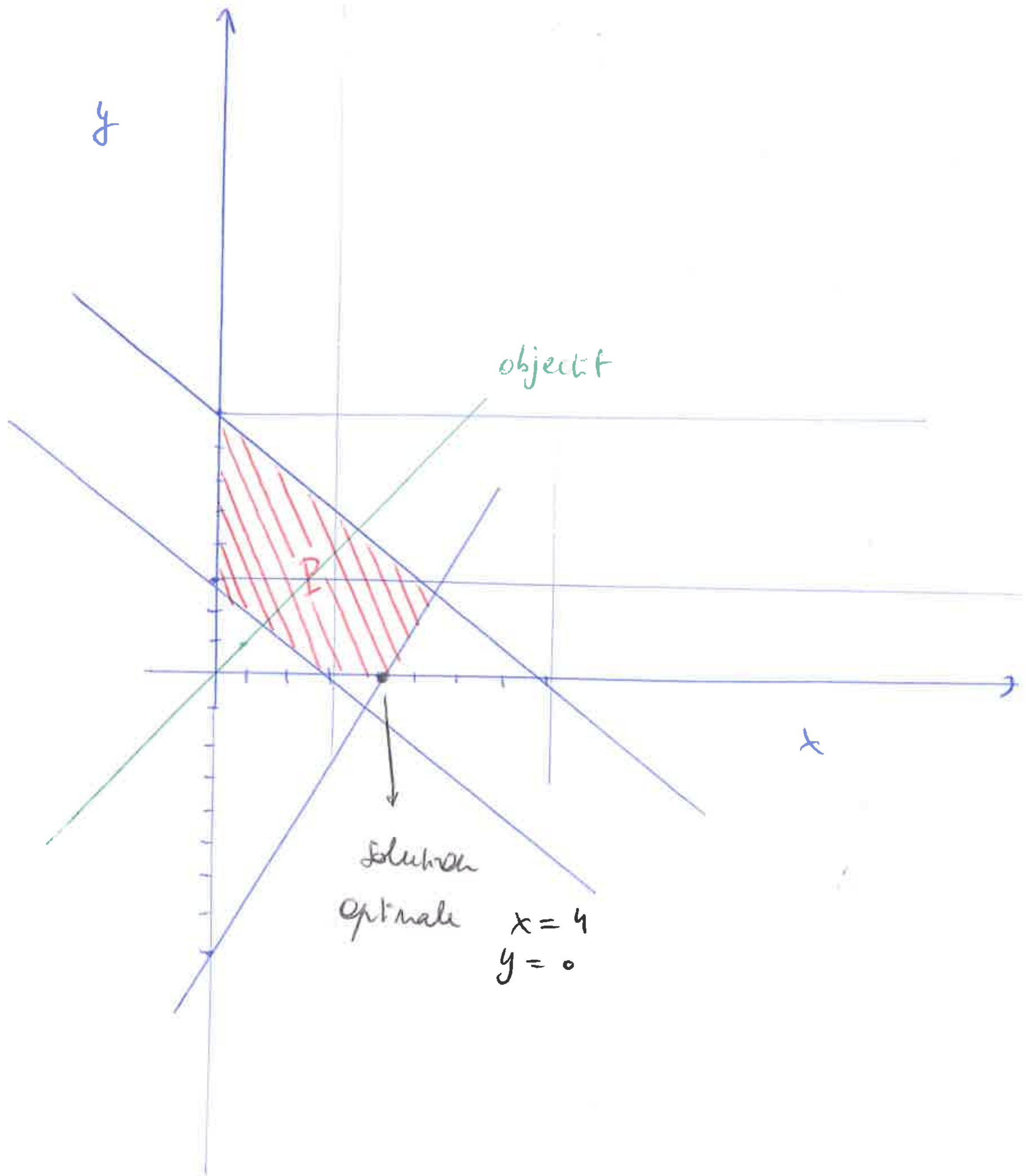
$$\min \quad y - x$$

$$y - 2x \geq -8 \rightarrow y \geq -8 + 2x$$

$$y + x \leq 8 \rightarrow y \leq 8 - x$$

$$y + x \geq 3 \rightarrow y \geq 3 - x$$

$$x, y \geq 0$$



Pour résoudre le problème à l'aide de la méthode "grand M" on commence par réécrire ce donner sous la forme suivante

$$\min \; y - x + M a_1$$

$$2x - y + S_1 = 8$$

$$y + x + S_2 = 8$$

$$y + x - S_3 + a_1 = 3$$

$$x, y, S_1, S_2, S_3, a_1 \geq 0$$

le premier tableau donne

2	-1	1	0	0	0	8
1	1	0	1	0	0	8
1	1	0	0	-1	1	3
-1	1	0	0	0	M	

On commence par supprimer le M ce qui donne le tableau

$$L_4' \leftarrow L_4 - M L_3$$

2	-1	1	0	0	0	8	
1	1	0	1	0	0	8	
1	1	0	0	-1	1	3	sortante
-1-M	1-M	0	0	M	0	-3M	
entrante							

de façon à obtenir le tableau suivant, on implémente les opérations

$$L_2' \leftarrow L_2 - L_3$$
$$L_1' \leftarrow L_1 - 2L_3$$
$$L_4' \leftarrow L_4 + (1+M) L_3$$

le tableau résultant est alors donné par

0	-3	1	0	2	-2	2
0	0	0	1	1	-1	5
1	1	0	0	-1	1	3
0	2	0	0	-1	1+M	3

Question 4 (suite)

0	-3	1	0	2	-2	2 → sortant
0	0	0	1	1	-1	5
1	1	0	0	-1	1	3
0	2	0	0	-1	$1+M$	3
				entrant		

Finalement, en appliquant la mise à jour

$$L_1' \leftarrow L_1/2$$
$$L_2' \leftarrow L_2 - L_1'$$
$$L_3' \leftarrow L_3 + L_1'$$
$$L_4' \leftarrow L_4 + L_1'$$

on obtient le tableau

0	$-3/2$	$1/2$	0	1	-1	1
0	$3/2$	$-1/2$	1	0	0	4
1	$-1/2$	$1/2$	0	0	0	4
0	$1/2$	$1/2$	0	0	$M-1$	4

dont la solution optimale est donnée par $x=4$, $y=0$