Examen Master MISC - Optimisation des systèmes de l'ingénieur ULCO/EILCO

Mai 2023

Nom :
Prénom :

Total: 38 points
Durée: 3h
Instructions générales: L'examen comprend 2 parties (Chacune de ces parties reprenant différentes sous-questions). Vous êtes libres de rédiger vos réponses sur des pages supplémentaires en veillant toutefois à bien <u>indiquer le numéro de chaque question</u>. Une fois l'examen terminé, Assurez vous de bien <u>écrire votre nom (de façon lisible) sur chacune des pages</u>. Répondez à un maximum de questions, en commençant par les questions qui vous semblent les plus abordables.

Question 1 (20pts)

1. [5*pts*] *Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses*

Vrai / Faux	*L'ensemble admissible d'un programme d'optimisation linéaire sous forme standard est toujours borné*
Vrai / Faux	*Dans le cadre d'un problème de maximisation, si une solution de base admissible a un vecteur de coûts réduits dont toutes les entrées sont négatives ou nulles, la solution correspondante est optimale*
Vrai / Faux	*Si le problème dual n'admet pas de solution admissible, il en va de même pour le problème primal*
Vrai / Faux	*Si le coût marginal (shadow price) d'une contrainte est nul, cette contrainte est nécessairement active à l'optimum.*
Vrai / Faux	*Si un programme d'optimisation linéaire a plus d'une solution optimale, il admet nécessairement une infinité de solutions optimales*
Vrai / Faux	*Dans un polytope, tout point extrême est un sommet.*
Vrai / Faux	*La contrainte $|x| \leq 2$ peut être réécrite sous la forme d'un programme linéaire*
Vrai / Faux	*La contrainte $|x| \geq 2$ peut être réécrite sous la forme d'un programme linéaire*

2. [11*pts*] *On considère le problème suivant:*

$$\begin{aligned} \max \quad & x_2 + 3x_1 \\ s.t. \quad & x_2 \leq 3 + x_1 \\ & x_2 \leq 6 - x_1/2 \\ & x_2 \geq 3x_1 - 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned} \tag{P}$$

   (a) [2*pts*] *Représenter l'ensemble admissible.*

(b) [4pts] *Résoudre le problème à l'aide de l'agorithme du simplexe (sous forme de tableaux) en veillant bien à détailler chaque étape. A chaque étape, indiquer la solution de base admissible sur l'ensemble admissible représenté au point 2a.*

(c) [1pts] *Quelles sont les contraintes actives/inactives? Justifier*

(d) [1pts] *Supposons que l'on autorise une relaxation de la contrainte* $x_2+x_1/2 \leq 6$ *d'une unité. Expliquer quel sera l'effet sur la valeur de l'objectif. En déduire le coût marginal (shadow price) associé à la contrainte.*

(e) [2pts] *Donner (D) le dual de (P)*

(f) [1pts] *Soit* y_1, y_2 y_3 *et* y_4*, les variables duales respectivement associées aux contraintes 1, 2, 3 et 4 du problème primal. Sans résoudre le problème dual, déduire des questions précédentes la valeur de* y_3 *à l'optimum.*

3. [4pts] *On considère une entreprise qui produit des chaises et des tables. Chaque pièce nécessite 3 opérations: le découpage, l'assemblage et l'étape de finition. La chaine de découpage ne peut être utilisée que durant un maximum de 40 heures par semaine. La chaine d'assemblage pendant un maximum de 42 heures et l'étape de finition emploie des ouvriers qui ne peuvent travailler plus de 25 heures sur la semaine. Une chaise nécessite 1h de découpe, 2h d'assemblage et 1h de finition. Une table nécessite 2h de découpe, 1h d'assemblage et 1h de finition. Sachant que le profit est de 20 € pour une chaise et de 30 € pour une table, on souhaite déterminer les nombres de pièces que l'entreprise peut produire afin de maximiser son profit. Ecrire le problème (sans le résoudre) sous forme d'un programme d'optimisation linéaire.*

Question 2 (18pts)

1. [5pts] *Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses*

Vrai / Faux	*Soit un problème de minimisation linéaire P sur $\mathbb{R}^d$. La solution optimale de P fournit une borne inférieure sur la solution de $P \cap \mathbb{Z}^d$*
Vrai / Faux	*Soit un problème d'optimisation linéaire I sur les entiers, Soit P_E le programme d'optimisation linéaire correspondant à la relaxation de I définie sur l'enveloppe convexe du domaine admissible de ce dernier problème. Toutes les solutions optimales de P_E sont entières.*
Vrai / Faux	*Soit l'ensemble suivant: $S = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 2+x,\ y \leq 6-x,\ y \geq 2-x,\ y \geq x-2\right\}$ L'enveloppe convexe de l'ensemble $S \cap \mathbb{Z}^2$ est l'ensemble S lui-même*
Vrai / Faux	*Soit un problème linéaire de minimisation sur les entiers I défini sur l'ensemble admissible $S \cap \mathbb{Z}^d$ ou S est un polytope. Soit la relaxation de ce problème définie sur le polytope S. Si la solution de cette relaxation est entière, elle fournit une borne inférieure sur la solution de I*
Vrai / Faux	*Soit l'ensemble $P = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \mid 1.2x_1 + 2.5x_2 + 3.2x_3 + 4.7x_4 \leq 12.4\right\}$. On considère le sous-ensemble $P \cap \mathbb{Z}_+^4$. La contrainte $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 12$ est valide pour l'ensemble $P \cap \mathbb{Z}_+^4$*
Vrai / Faux	*Soit l'ensemble $P = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \mid 1.2x_1 + 2.5x_2 + 3.2x_3 + 4.7x_4 \leq 12.4\right\}$. On considère le sous-ensemble $P \cap \mathbb{Z}_+^4$. La contrainte $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 13$ est valide pour l'ensemble $P \cap \mathbb{Z}_+^4$*

2. [2pts] *On considère l'ensemble suivant:*

$$X = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_+^4 \mid 4x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 5x_4 \leq 33\right\}$$

ainsi que le point $\boldsymbol{x} = \left(0, 0, \frac{33}{7}, 0\right)$. Fournir une inégalité valide permettant de séparer $\boldsymbol{x}$ du reste des solutions admissibles de X.

3. [5pts] *Soit P un problème d'optimisation sur les entiers auquel on applique l'algorithme des coupes de Gomory. On suppose qu'après avoir résolu une première relaxation du problème à l'aide de la méthode du simplexe, on obtient le tableau 1.*

   (a) [1pt] *S'agit-il d'un problème de minimisation ou de maximisation? Justifier.*

   (b) [2pt] *Donner la solution optimale correspondant au tableau.*

   (c) [2pts] *En se basant sur la procédure de Chvátal-Gomory, donner une inégalité valide (dans le sens du tableau 1) permettant de rejeter la solution correspondant au tableau.*

4. [4pts] *Soit le problème d'optimisation sur les entiers suivant*

$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 4x_2 \\ s.t. \quad & 3x_1 + 4x_2 \leq 10 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned} \tag{1}$$

Résoudre le problème à l'aide de la méthode de Branch and Bound. Représenter l'arbre correspondant (en indiquant bien les bornes supérieures et inférieures pour chacun des sous-problèmes.).

5. [2pts] *On considère un jeu d'échec tel que représenté à la Figure 1. On souhaite placer un maximum de reines sur le jeu sans qu'aucune des reines ne soit menacée par les autres. Sachant qu'une reine peut se déplacer verticalement, horizontalement et en diagonale, exprimer ce problème sous forme d'un programme d'optimisation sur les entiers.*

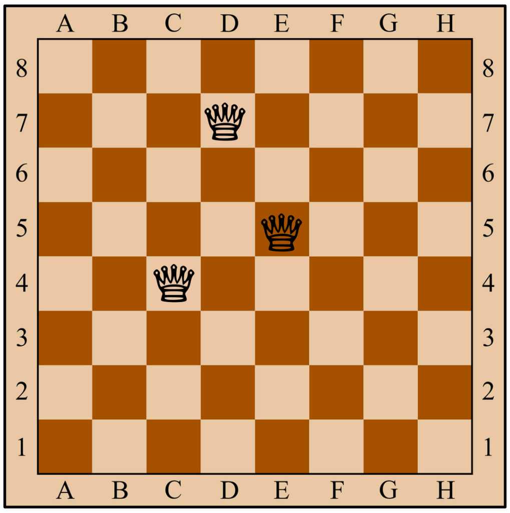

Figure 1: Figure utilisée à la question 2.5. Aucune des reines représentées sur l'échiquier n'est mise en danger par les autres. I.e chaque ligne, colonne ou diagonale contient au plus une reine.

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
1	0	4.2	5.1	2	0	4/3
0	1	3.1	1.6	-1.5	0	3
0	0	2	-2.2	4	1	5
0	0	-1	-4	-2	0	

Table 1: Tableau utilisé à la question 2.3.