Examen ING1-AGRO EILCO - Analyse Numérique

Décembre 2023

Nom :   Prénom :

Total : 31 points
Durée : 2h
Instructions générales : L'examen comprend 2 parties (Chacune de ces parties reprenant différentes sous-questions). Vous êtes libres de rédiger vos réponses sur des pages supplémentaires en veillant toutefois à bien indiquer le numéro de chaque question. Une fois l'examen terminé, assurez vous de bien écrire votre nom (de façon lisible) sur chacune des pages. Répondez à un maximum de questions, en commençant par les questions qui vous semblent les plus abordables.

Partie 1 (Interpolation et quadrature – 19pts)

1. [5pts] *Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses*

Vrai / Faux	*Pour une même fonction $f(x)$, choisir les zéros des polynômes de Chebyshev au lieu de points équidistants comme abscisses d'interpolation permet de réduire l'erreur d'interpolation*
Vrai / Faux	*La règle des trapèzes s'obtient en intégrant un interpolant linéaire entre deux points adjacents*
Vrai / Faux	*Le terme d'erreur dans la règle de Simpson en intégration numérique fait apparaître une dérivée d'ordre 4*
Vrai / Faux	*Les formules de Newton-Cotes permettent de garantir l'intégration exacte de polynômes de degré n où n est le nombre de points équidistants utilisés par la règle.*
Vrai / Faux	*Dans le schéma des différences divisées de Newton sur n points $x_0, \ldots, x_n$, les seules valeurs utilisées dans la construction du polynôme d'interpolation sont les valeurs $f[x_0], f[x_0, x_1], \ldots f[x_0, \ldots, x_n]$*
Vrai / Faux	*L'interpolation polynomiale et les formules de quadrature de Newton-Cotes sont toujours plus précises pour des fonctions qui varient lentement*
Vrai / Faux	*La règle du point médian appliquée à l'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symmétrique $[-L, L]$ retourne toujours 0*

2. [6pts] *On souhaite construire le polynôme d'interpolation passant par les points $(x_0, y_0) = (0, 1)$, $(x_1, y_1) = (1, 2)$ et $(x_2, y_2) = (2, 1)$. Pour ce faire on procédera comme suit :*
   (a) [2pts] *Donner l'expression des polynômes de Lagrange $\ell_0(x)$, $\ell_1(x)$ et $\ell_2(x)$*
   (b) [1pt] *En déduire l'expression du polynôme d'interpolation $p_3(x)$.*
   (c) [1pt] *Sans refaire les calculs, donner le polynôme d'interpolation dans le cas ou le point $(2, 1)$ est remplacé par le point $(2, 3)$.*

(d) [1pt] *On suppose à présent que le point* $(2,1)$ *est remplacé par le point* $(1+\varepsilon, 1)$ *où* ε *est un très petit réel strictement positif (on pourra par exemple considérer* $\varepsilon = .001$*). On souhaite donc calculer le polynôme d'interpolation pour les points* $(0,1), (1,2)$ *et* $(1+\varepsilon, 1)$*. Quel est l'effet de ce changement sur les coefficients du polynôme d'interpolation ?*

(e) [1pt] *Représenter graphiquement chacun des trois polynômes correspondant aux points (b)-(d) ainsi que leurs données d'interpolation respectives.*

3. [4pts] *On souhaite améliorer la méthode des trapèzes sans augmenter l'ordre de quadrature. Pour ce faire, on décide de suivre les étapes ci dessous :*

   (a) [1pt] *Énoncer la règle des trapèzes composite sur l'intervalle* $[a,b]$ *pour* m *sous-intervalles (*$m+1$ *points donc) pour une fonction générale* $f(x)$*.*

   (b) [1pt] *Soit* $T_m(f)$ *l'approximation de l'intégrale par la formule des trapèzes composite obtenue au point (a). Dériver une borne sur l'erreur de quadrature* $E_m = \int_a^b f(x)\,dx - T_m(f)$ *(correspondant à la somme des bornes d'erreur sur chaque sous-intervalle)*

   (c) [1pt] *En utilisant le fait que pour* $\xi_k \in [a+(k-1)h, a+kh]$ *ou* $h = (b-a)/m$*,*

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{b-a}{m} f''(\xi_k) \approx \int_a^b f''(x)\,dx \tag{1}$$

   Montrer que l'erreur de quadrature peut se réécrire

$$E_m \approx -\frac{h^2}{12}\left(f'(b) - f'(a)\right) \tag{2}$$

   (d) [1pt] *En déduire une amélioration de la règle des trapèzes.*

4. [4pts] *On considère le schéma des différences divisées de Newton donné à la Table 1.*

   (a) [2pts] *Deux valeurs ont été effacées lors de la rédaction du tableau. En utilisant les valeurs lisibles, retrouver les deux valeurs manquantes :*

	
	

   (b) [2pts] *On voudrait à présent utiliser le tableau afin de déterminer les coefficients du polynôme d'interpolation* $p_5(x)$ *passant par les points* $(x_0, y_0) = (0,1)$*,* $(x_1, y_1) = (1,3)$*,* $(x_2, y_2) = (3,49)$*,* $(x_3, y_3) = (4,129)$ *et* $(x_4, y_4) = (7,813)$*. On désire écrire* $p_5(x)$ *sous la forme suivante :*

$$p_5(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x(x-1) + a_3 x(x-1)(x-3)$$

   Donner la valeur des coefficients a_0, a_1, a_2 *et* a_3 *en vous aidant du tableau.*

x	$f(x)$			
0	1			
		2		
1	3		7	
		23		3
3	49			
		80		3
4	129		37	
				
7	813			

Table 1 – Schéma de différences divisées utilisé à la question 1.4.

Partie 2 (Transformée de Laplace et transformée de Fourier – 12pts)

1. [5pts] *Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses*

Vrai / Faux	*La série de Fourier d'une fonction périodique impaire ne contient nécessairement que des termes en sinus.*
Vrai / Faux	*N'importe quelle fonction comprenant un nombre fini de discontinuités admet une transformée de Laplace*
Vrai / Faux	*La formule d'Euler* $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ *permet de réécrire le cosinus sous la forme* $(e^{i\theta} - e^{-i\theta})/2$
Vrai / Faux	*La transformée de Laplace de la fonction* $u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$ *est donnée par* $\mathcal{L}\{u(t)\} = 1/s$
Vrai / Faux	*La série de Fourier de la fonction* $f(x) = \cos^2(\pi x/L)$ *est donnée par* $f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$
Vrai / Faux	*Pour tout* m, n $\int_{-T}^{T} \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{T}\right) dx = 0$
Vrai / Faux	*Soit la fonction périodique de période 2* $f(x)$ *définie par* $f(x) = x \quad (-1 \leq x < 1)$, $f(x+2n) = f(x)$. *Tous les coefficients de Fourier de* f *sont non nuls.*
Vrai / Faux	*La transformée de Laplace d'un produit de deux fonctions* $f(t)g(t)$ *est donnée par le produit des transformées de Laplace de chacune des fonctions. I.e.* $\mathcal{L}\{f(t)g(t)\} = F(s)G(s)$ *où* $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ *et* $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$

2. [2pts] *On considère les fonctions* $\psi_{00}(x)$ *et* $\psi_{01}(x)$ *(appelées ondelettes de Haar) représentées à la figure 1. Montrer que ces fonctions sont orthogonales sur* $[-T, T]$.

3. [3pts] *La formule de Leibniz pour* π *est donnée par*

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \tag{3}$$

Afin de démontrer cette formule, on exécutera les étapes suivantes :

(a) [2pts] *Calculer la série de Fourier de la fonction* 2π*-périodique*

$$\begin{aligned} &f(x) = x \qquad (-\pi \leq x < \pi) \\ &f(x+2n\pi) = f(x) \end{aligned} \tag{4}$$

(b) [1pts] *Déterminer une valeur de* $x \in [-\pi, \pi]$ *pour laquelle l'égalité entre la fonction* $f(x)$ *et la série obtenue au point (a) permet de récupérer la formule de Leibniz.*

4. [2pts] *Calculer la transformée de Laplace de la fonction* $f(t)$ *définie par*

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases} \tag{5}$$

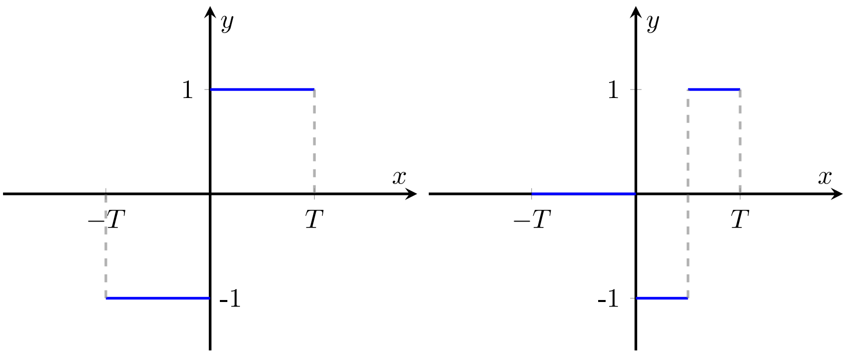

FIGURE 1 – Ondelette de Haar $\psi_{0,0}(x)$ (gauche) et $\psi_{0,1}(x)$ (droite)