

# Introduction to optimisation

DM 01

Date de début: 24 mars 2023

Date de fin: 7 avril 2023

[augustin.cosse@univ-littoral.fr](mailto:augustin.cosse@univ-littoral.fr)

Mars 2023

Nom :

Prénom :

**Total:** 20 points

**Instructions générales:** Vous pouvez rendre vos brouillons mais les réponses reportées sur le devoir (en particulier dans les cases prévues à cet effet) doivent être claires et sans ratures. Le brouillon ne sera utilisé pour l'évaluation du devoir que si les réponses ont été correctement reprises dans les cases correspondantes. Dans ce cas les développements complémentaires réalisés au brouillon pourront être utilisés afin de faire la différence entre erreurs d'inattention et erreurs de compréhension.

**Question 1 (5pts)** *On considère le problème d'optimisation linéaire suivant:*

$$\begin{aligned} \max \quad & x_2 + 3x_1 \\ \text{s.t.} \quad & x_2 - x_1 \leq 2 \\ & x_2 + 2x_1 \geq 3 \\ & x_2 - x_1 \geq -2 \\ & x_2 + 2x_1 \leq 10 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

1. *Représenter le domaine admissible dans le cadre ci dessous*

2. Déterminer la solution du problème de manière graphique et donner la paire  $(x_1, x_2)$  (exacte) correspondant à la solution obtenue dans le cadre ci dessous.

**Question 2 (Optimisation d'un portefeuille d'obligations, 5pts)** On considère une banque disposant d'un échéancier donné au tableau 1. En d'autres termes, la banque doit payer \$12,000 à la fin de la première année, \$18,000 à la fin de la seconde année et \$20,000 à la fin de la troisième année. Les obligations sont des titres qui sont mis sur le marché par des agences (entreprises ou gouvernements) donnant droit au paiement d'un intérêt périodique (sous forme de coupon) ainsi qu'au paiement principal (valeur nominale) à un instant donné dans le futur (échéance ou maturité de l'obligation). La banque souhaite utiliser les trois obligations reprises dans le tableau 2 pour constituer un portefeuille (collection d'obligations), à partir d'aujourd'hui, qu'elle maintiendra jusqu'à ce que toutes les obligations soient arrivées à maturité. La banque souhaite également que ce portefeuille lui fournisse assez de cash que pour payer ses passifs/engagements financiers repris au tableau 1. Toutes les obligations ont une valeur nominale de \$100 et les coupons (i.e. versements) sont annuels (avec un coupon par an). Par exemple, une obligation de type 2 coûte \$99 aujourd'hui et le détenteur reçoit \$3.50 après la première année et \$3.50 plus la valeur nominale de \$100 à la fin de la seconde année (correspondant à la maturité de ce type d'obligation). La banque souhaite acquérir un nombre d'obligations de type 1, 2 et 3 de façon à ce que le cash généré puisse lui permettre de contrebalancer ses passifs. On supposera que la banque peut acquérir des montants fractionnaires en chacune des obligations. Exprimer le problème sous forme d'un programme d'optimisation linéaire dans le cadre ci-dessous.

Année 1	Année 2	Année 3
\$ 12,000	\$18,000	\$ 20,000

Table 1: Échéancier considéré à la question 2.

Type d'obligation	1	2	3
Prix	\$102	\$ 99	\$ 98
Coupon	\$ 5	\$ 3.5	\$ 3.5
Année de maturité	1	2	3

Table 2: Obligations considérées à la question 2.



**Question 3** on souhaite utiliser l'algorithme du simplexe pour résoudre le problème suivant (sur les entiers):

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 2x_1 - x_2 + 2x_3 \\
 \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 10 \\
 & x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 20 \\
 & x_2 + 2x_3 \leq 5 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

on veillera à détailler chaque étape (en précisant bien la variable entrante et la variable sortante) et l'on reprendra la solution finale dans l'espace ci-dessous.



**Question 4** on souhaite utiliser la Méthode des plans sécants de Gomory afin de résoudre le problème suivant:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 5.5x_1 + 2.1x_2 \\
 \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 \leq 2 \\
 & x_1 + 2x_2 \leq 17 \\
 & x_1, x_2 \geq 0 \\
 & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

*on veillera à détailler chaque étape (en précisant bien la variable entrante et la variable sortante)  
et l'on reprendra la solution finale dans l'espace ci-dessous.*

